This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

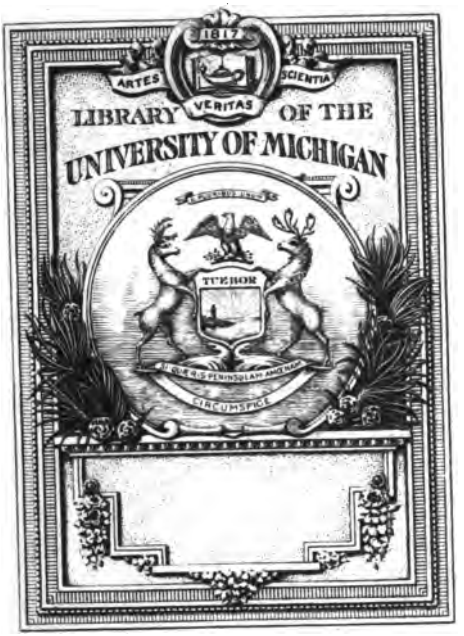
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
551
L495
1804

ESSAIS

DE

GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE.

ESSAIS

DE

GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE.

Par F.[Frédéric Louis] LEFRANÇOIS, Officier d'Artillerie.

SECONDE ÉDITION

REVUE ET AUGMENTÉE.

Licuit semperque licebit
Signatum præsente notâ producere *dictum*.
HORAT.

A PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 71.

Et à Metz, chez DEVILLY, Libraire, rue du Petit-Paris.

AN XII = 1804.

Hist. of sci.
Sib. de sci.
6-24-38
36524

PRÉFACE.

J'AI publié en l'an IX des *Essais sur la Ligne droite et les Courbes du second degré*; j'en offre aujourd'hui la deuxième édition, j'ai changé le titre, parce qu'il m'a semblé que celui qu'il porte maintenant indique mieux la place qu'il peut occuper dans l'étude des Mathématiques élémentaires.

4-26-39 NDM.

Il a pour objet d'exposer les principes de la Géométrie analytique, ou la méthode qui consiste à traiter les questions proposées par les seuls moyens que fournit l'Analyse, en ne tirant de la Géométrie que ce qui est absolument indispensable pour l'expression des conditions de chaque problême.

J'y ai réuni tout ce que doivent savoir

sur cette partie les jeunes-gens qui se destinent à l'Ecole polytechnique, et j'ai tâché de le présenter de manière à préparer leurs idées aux leçons qu'ils y recevront ensuite des CC. Monge et Hachette.

Cette seconde Edition offre des changemens importans, des suppressions, des additions.

Les changemens et les suppressions sont la suite des remarques que des élèves qui ont étudié la première édition sous mes yeux m'ont donné l'occasion de faire, et des observations que plusieurs géomètres, et particulièrement le Professeur Lhuillier de Genève, ont bien voulu m'adresser.

Quelques-unes des additions, comme la démonstration de l'identité des courbes du second degré avec les sections d'une surface conique par un plan, ont pour objet de completter l'ouvrage et de le rendre

propre à remplir le but proposé ; parmi les autres, on en trouvera qui m'ont été suggérées par la lecture des Ouvrages publiés depuis la première édition de celui-ci ; mais, pour ne point entrer dans des détails superflus, je n'ai admis aucune de ces dernières qui ne fût une suite immédiate de ce que j'avais précédemment écrit.

J'ai eu soin dans cette nouvelle Edition, comme dans la première, d'éviter la question des quantités négatives, pour l'intelligence de laquelle des commençans ne me paraissent pas avoir assez de données ; ils pourront, par la suite, voir cette difficulté dénouée avec autant d'exactitude que d'élégance, dans la première section du Traité que le C. Carnot vient de publier sous le titre de *Géométrie de position*, et dans la dissertation dont il l'a fait précéder.

Ils devront encore consulter, pour une

foule de détails sur lesquels je ne me suis pas étendu, les cinquième et sixième sections du même Traité; j'en dirais plus si je ne devais me borner à indiquer et à citer lorsqu'il est question d'un tel Ouvrage, et d'un tel Auteur.

ESSAIS

ESSAIS

DE

GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

De la manière de déterminer la position d'un point sur un plan et de l'équation d'une ligne.

POUR déterminer la position d'un point sur un plan, on trace dans ce plan deux droites qui font entr'elles un angle connu ; par le point on mène des parallèles à chacune des droites, et les portions de ces parallèles comprises entre le point et les droites étant données, soit en nombres, soit en quantités algébriques correspondant à des nombres, le point est déterminé.

Il est facile de sentir que ces données sont propres à faire connaître la position du point ; soient en effet AX et AY (*fig.* 1) les deux droites de position fixe, et a, b les grandeurs des parallèles interceptées entre ces droites et le point : on prendra sur AX une grandeur $AP=a$, et par le point P on mènera une parallèle PM à AY; le

point cherché devra déjà se trouver sur cette parallèle ; on prendra ensuite sur AY une partie $AQ=b$, et par le point Q on mènera une parallèle QM à AX ; cette seconde droite contiendra aussi le point cherché : donc ce point se trouvera, et sur la droite PM, et sur la droite QM ; donc il sera au point M d'intersection de ces deux droites.

Le point ne serait cependant pas entièrement déterminé, si l'on ne connaissait d'avance celui des quatre angles formés autour du point A dans lequel il doit se trouver, c'est-à-dire, si avec les grandeurs des parallèles a et b, on ne connaissait aussi le sens dans lequel elles doivent être prises. Pour l'indiquer, on commence par établir que les distances mesurées sur AX sont positives lorsqu'elles sont dirigées de A vers X, et négatives dans le sens contraire : que, de même, les distances mesurées sur AY sont positives de A vers Y et négatives de A vers Y'. D'après cette convention, les signes des quantités a et b déterminent toujours l'angle dans lequel se trouve le point ; si, par exemple, elles sont toutes deux positives, le point sera dans l'angle YAX ; il sera dans l'angle $X'AY'$, si elles sont toutes deux négatives ; enfin, il sera dans l'un des angles $X'AY$, XAY', suivant que b étant positif, a sera négatif, ou que a étant positif, b sera négatif.

Des deux quantités a et b, la première se nomme *l'abscisse* du point, et la seconde son *ordonnée* ; toutes deux se désignent aussi du nom commun de *coordonnées* : quand le point que l'on considère est supposé quelconque, on représente ordinairement ses coordonnées par les lettres x et y.

Les deux droites AX et AY se nomment *axes des coordonnées*, et le point A de leur intersection se nomme *origine*. L'angle de ces droites est absolument arbitraire : on peut, pour plus de simplicité, les supposer perpendiculaires

entr'elles, et alors les coordonnées d'un point sont précisément ses distances aux deux axes. Nous en userons toujours ainsi, par la suite, à moins que nous n'avertissions expressément du contraire.

Il est à remarquer que pour tous les points situés sur l'axe des x, l'ordonnée est nulle; que l'abscisse est nulle pour tous les points de l'axe des y, et enfin que l'abscisse et l'ordonnée sont nulles en même tems pour l'origine des coordonnées.

Sachant fixer, à l'aide des conventions précédentes, la position d'un point, concevons maintenant qu'une ligne étant tracée sur un plan, chacun de ses points soit rapporté à deux axes de position connue; s'il existe entre les coordonnées du second point la même relation qu'entre celles du premier, entre les coordonnées du troisième la même relation qu'entre celles du second, et ainsi de suite; c'est-à-dire, si l'ordonnée d'un point quelconque se déduit de son abscisse, en effectuant sur celle-ci les opérations faites sur l'abscisse du point précédent pour avoir son ordonnée, on pourra traduire en caractères algébriques la loi de cette dépendance mutuelle, et l'équation que l'on obtiendra de cette manière, offrira le tableau des calculs à effectuer pour obtenir l'abscisse d'un point en partant de son ordonnée, ou réciproquement l'ordonnée en partant de l'abscisse.

Cette expression du rapport entre les x et y pour chaque point d'une ligne est ce qu'on nomme l'équation de cette ligne, et cette dernière, à son tour, se nomme le lieu de l'équation. Il est facile de sentir qu'il est toujours possible de trouver la ligne qui est le lieu d'une équation donnée; mais la réciproque n'est pas également vraie, et une ligne donnée ne peut avoir une équation, qu'autant qu'il est possible d'assigner la loi de sa génération.

En rapportant ainsi chaque point d'une ligne à deux droites connues de position, nous aurons le moyen de re-

présenter toutes les circonstances du cours de cette ligne ; mais comme un objet quelconque est d'autant mieux connu, qu'on établit ses rapports avec un plus grand nombre d'autres objets, il sera quelquefois utile de comparer la ligne que l'on examinera avec d'autres lignes déjà connues, et cette recherche pourra conduire à déterminer l'intersection de deux lignes.

Or deux lignes qui se coupent ont dans leurs points d'intersection les mêmes coordonnées ; ces coordonnées seront donc les valeurs de x et de y résultant de l'élimination de ces quantités entre les équations des deux lignes, puisqu'on établit par la simultanéité de ces deux équations, que ce n'est pas de tous les points de la première ligne indistinctement, ni de tous ceux de la seconde que l'on s'occupe, mais seulement de ceux de leur intersection pour chacun desquels les deux équations doivent avoir lieu, puisqu'ils sont en même tems sur les deux lignes.

Il suit de là que pour déterminer les coordonnées des points où une ligne rencontre l'axe des y, il faudra éliminer x entre l'équation de la ligne et celle de cet axe ; et comme l'équation de l'axe des y et $x=0$, puisque pour chacun de ses points l'ordonnée est nulle, il est clair que les ordonnées cherchées sont celles qui, dans l'équation de la ligne, correspondent à $x = 0$; on prouvera de la même manière que les abscisses des points où une ligne vient rencontrer l'axe des x, sont les valeurs de x qui, dans l'équation de cette ligne, répondent à $y = 0$.

Ces préliminaires posés, nous allons passer à l'examen de la ligne droite qui est la plus simple de toutes les lignes, et qui sera ensuite le terme de comparaison auquel nous rapporterons toutes les autres.

CHAPITRE PREMIER.

De la Ligne droite.

TOUTES les propriétés de la ligne droite, toutes les circonstances qui suivent de sa nature et de sa situation, se déduiront de son équation avec la plus grande facilité ; il importe donc de trouver d'abord cette équation, et pour cela, d'exprimer algébriquement une propriété qui caractérise cette espèce de ligne.

Soient donc AX et AY les deux axes des coordonnées et BM une droite que nous supposerons connue, 1°. par son ordonnée AB à l'origine, ordonnée que nous représenterons par b ; 2°. par l'angle BDA, qu'elle fait avec l'axe des abscisses, angle dont nous représenterons la tangente par a.

Cela posé, une propriété dont la droite BM jouit dans toute son étendue, c'est que, de quelque point M de cette droite que l'on abaisse la perpendiculaire PM sur l'axe des x, le triangle MBC sera rectangle et l'angle MBC égal à l'angle BDA ensorte qu'on aura toujours :

$$1 : \text{tang } BDA :: BC : CM$$

ou

$$1 : a :: x : y-b$$

et, par conséquent, pour la relation demandée :

$$y = ax + b$$

Telle est donc l'équation de la ligne droite, ou la relation qui, pour chacun de ces points, existe entre les distances de ce point aux deux axes coordonnés. On remarquera que

les variables x et y n'y entrent qu'au premier degré, et qu'elles s'y trouvent combinées avec deux constantes a et b dont la première est la mesure de l'inclinaison de la ligne sur l'axe des abscisses, et la seconde la mesure de son élévation au-dessus de l'origine; ce sont ces constantes qui particularisent la position d'une ligne droite et la font différer de toute autre ligne droite.

L'équation générale du premier degré à deux indéterminées $Ay = Bx + C$ rentre dans celle que l'on vient de trouver, lorsqu'on pose $\frac{B}{A} = a$, $\frac{C}{A} = b$, et comme cette transformation n'altère pas sa généralité, il s'ensuit que l'équation de la ligne droite est l'équation générale du premier degré à deux inconnues et par conséquent qu'une telle équation ne peut avoir pour lieu géométrique qu'une ligne droite.

Voyons maintenant comment l'équation

$$y = ax + b$$

retrace les différentes circonstances du cours de la ligne qu'elle construit : d'abord, il est clair que pour toutes les valeurs positives que l'on attribuera à x, c'est-à-dire, quel que soit le point de la partie BM que l'on considérera, l'ordonnée y sera toujours positive ; en second lieu, lorsqu'on donnera à x des valeurs négatives, l'équation devenant

$$y = -ax + b,$$

fournira encore pour y des valeurs positives tant que l'on aura

$$ax < b \text{ ou } x < \frac{b}{a},$$

et la limite de ces valeurs répondra à $x = \frac{b}{a}$, c'est-à-dire

au point D ; enfin pour toutes les valeurs de x négatives et plus grandes que $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire, pour tous les points qui sont au-delà du point D, l'ordonnée y aura le signe négatif et croîtra indéfiniment sous ce signe. La droite s'étendra donc indéfiniment dans l'angle XAY, aura un certain nombre de points dans l'angle $X'AY$ et s'étendra encore indéfiniment dans l'angle $X'AY'$.

Nous avons supposé l'axe des y coupé au-dessus de l'origine et l'ordonnée b a été positive; si la droite passait au-dessous de l'origine, on aurait

$$y = ax - b,$$

et un raisonnement semblable au précédent, ferait voir qu'elle aurait alors quelques points dans l'angle $X'AY$ et qu'elle s'étendrait ensuite à l'infini dans les deux angles contigus.

Pour construire la ligne lieu de l'équation

$$y = ax + b,$$

on déterminera deux points de sa direction, en choisissant, pour plus de simplicité, ceux où elle vient rencontrer chacun des axes; ainsi l'on fera successivement :

$$x = 0, y = 0,$$

ce qui donnera

$$y = b, x = -\frac{b}{a},$$

et il ne restera plus qu'à porter sur l'axe des y une quantité $= b$, et sur l'axe des x une quatrième proportionnelle aux trois lignes 1, b et a, en se dirigeant d'ailleurs pour le sens dans lequel on devra prendre ces distances sur le signe dont elles seront affectées.

Si la droite passait par l'origine, son équation serait seulement $y = ax$ et les deux suppositions de $x = 0$ et de $y = 0$, ne détermineraient plus qu'un seul point; pour en obtenir un second, on pourra faire $x = 1$, et la valeur correspondante de y étant a, ou la tangente de l'angle que la droite fait avec l'axe des x, se construira facilement.

Si a était nul, l'équation réduite à la forme $y = b$ appartiendrait à une droite menée parallèlement à l'axe des abscisses et à une distance b de cet axe, puisque, pour toutes les valeurs que l'on pourrait donner à x, l'ordonnée serait constamment égale à b.

De même, si l'on avait une équation de cette forme $x = c$, il est clair qu'elle appartiendrait à une droite dont tous les points seraient à une distance c de l'axe des y, c'est-à-dire à une perpendiculaire sur l'axe des x éloignée de l'origine de la quantité c.

Il nous sera facile actuellement de trouver l'équation d'une ligne qui passerait par deux points donnés et l'expression algébrique de la partie de cette droite interceptée entre les deux points. Supposons, en effet, qu'ils soient en M et M', et désignons par x', y', les coordonnées du premier et par x'', y'', celles du second, l'équation de la droite cherchée sera de la forme

$$y = Ax + B,$$

et le problème consiste à déterminer les deux coefficiens A et B, de manière à satisfaire aux deux conditions proposées.

Or il résulte de l'équation générale

$$y = Ax + B,$$

que A est égal à l'ordonnée d'un point quelconque de la ligne diminuée de la constante B, et divisée ensuite par

l'abscisse de ce point ; que B est égal à l'ordonnée d'un point quelconque diminuée du produit de l'abscisse correspondante par le nombre A ; puis donc que x' et y', x'' et y'', sont les coordonnées de deux points de la droite cherchée, on aura pour satisfaire à la première condition,

$$A = \frac{y' - B}{x'},$$

pour satisfaire à la seconde

$$B = y'' - Ax'',$$

et en éliminant A et B entre ces deux équations, on trouvera

$$A = \frac{y' - y''}{x' - x''}, \quad B = \frac{x'y'' - x''y'}{x' - x''},$$

et, par conséquent, pour l'équation particulière de la droite assujettie à passer par les deux points donnés,

$$y = \frac{y' - y''}{x' - x''}\, x + \frac{x'y'' - x''y'}{x' - x''}.$$

On arrivera plus facilement au résultat, et on l'obtiendra sous une forme plus symétrique, si posant à la fois les trois équations

$$\begin{aligned} y &= Ax + B \\ y' &= Ax' + B \\ y'' &= Ax'' + B, \end{aligned}$$

on retranche la seconde de la première, et la troisième de la seconde ; car on aura alors les deux équations

$$y - y' = A(x - x'), \quad y' - y'' = A(x' - x''),$$

et en mettant dans la première la valeur que donne la seconde pour A, on trouvera, pour l'équation cherchée :

$$y-y' = \frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x').$$

Il est à remarquer que l'équation

$$y-y' = A(x-x')$$

que l'on vient de trouver et dans laquelle le coefficient A reste indéterminé, est l'équation d'une droite passant par le point dont les coordonnées sont x' et y', et faisant avec l'axe des x un angle quelconque, ensorte qu'elle appartient à toutes les droites qu'il est possible de mener par ce point.

Quant à la distance des deux points, il est facile de voir qu'elle est

$$\sqrt{\overline{RM}^2+\overline{RM'}^2} \text{ ou } \sqrt{(AP'-AP)^2+(P'M'-PM)^2},$$

et que, par conséquent, elle a pour expression,

$$\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}.$$

Considérons maintenant deux droites à-la-fois, et proposons-nous d'abord d'exprimer d'une manière générale la tangente trigonométrique de l'angle qu'elles comprennent.

Soient donc BM et CM (*fig.* 2) deux droites,

et $y=ax+b$ l'équation de la première,
$y=a'x+b'$ l'équation de la seconde;

si par le point C, où la seconde vient rencontrer l'axe des x, on mène une parallèle CE à la première, on verra facilement que l'angle FMD qu'elles forment est la différence des angles FCX et DBX qu'elles font avec les abscisses, et par conséquent, que sa tangente est celle de la différence de ces angles, ensorte qu'on aura par les formules connues de

la trigonométrie,

$$\text{tang } FMD = \frac{\text{tang } FCX - \text{tang } DBX}{1 + \text{tang } FCX \text{ tang } DBX}$$

ou en désignant par a'' la tangente de l'angle FMD

$$a'' = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

On tire d'abord de cette expression du rapport entre la direction de l'axe des x et celle des deux droites proposées, l'équation :

$$a\,a'\,a'' + a - a' + a'' = 0$$

dans laquelle les signes des lettres a, a' et a'' sont variables et dépendans de la position des deux droites.

Mais quels que soient ces signes, il est visible qu'en échangeant les unes dans les autres les trois quantités que renferme cette équation, on obtiendra toujours un résultat de même forme, et qui, par conséquent, pourra toujours aussi se déduire des formules trigonométriques qui donnent au moyen des tangentes de deux angles la tangente d'un troisième angle, comme ou différence des deux premiers, d'où suit ce théorême :

Les angles que forment entr'elles les directions de trois lignes droites quelconques tracées dans un même plan, sont tels, que chacun d'eux est toujours égal ou à la somme des deux autres, ou à leur différence, ou à la somme de leurs supplémens.

La formule $\frac{a' - a}{1 + aa'}$ étant l'expression de la tangente de l'angle des deux droites, au moyen des tangentes des angles qu'elles font avec l'axe des x, il sera facile de déterminer le coefficient a' dans l'équation de la seconde droite, de

manière qu'elle fasse avec la première un angle dont la tangente serait m ; car il ne faudra que prendre alors pour a' la valeur que donne l'équation

$$\frac{a'-a}{1+aa'}, = m.$$

Par exemple, si les deux droites doivent être parallèles, on aura $m=0$, et par conséquent

$$\frac{a'-a}{1+aa'}=0 \text{ ou simplement } a'=a.$$

Si elles doivent être à angle droit, m sera infini, et le dénominateur de la fraction $\frac{a'-a}{1+aa'}$ sera nul ; ensorte qu'on aura :

$$1+aa'=0$$

ou

$$a'=-\frac{1}{a}.$$

Si elles forment entr'elles un angle de 50°, on aura

$$m=1,$$

ou

$$\frac{a'-a}{1+aa'}=1,$$

d'où l'on tirera

$$a'=\frac{1+a}{1-a};$$

et en général, si elles doivent former un angle qui ait pour tangente m, on aura

$$a'=\frac{m+a}{1-ma}.$$

On a trouvé plus haut pour l'équation d'une droite menée

par le point dont les coordonnées sont x' et y',

$$y - y' = A(x - x').$$

Si donc, on a

$$y = ax + b,$$

pour l'équation d'une droite connue, on aura pour l'équation de celle qui lui serait menée parallèlement par le point x', y', (*)

$$y - y' = a(x - x');$$

pour l'équation de la perpendiculaire que l'on abaisserait du même point sur sa direction,

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x');$$

pour l'équation de la droite qui, passant encore par le même point, ferait avec elle un angle de 50°,

$$y - y' = \frac{1 + a}{1 - a}(x - x');$$

et en général, pour l'équation de la droite menée par le point x' y' de manière à couper la première sous un angle dont la tangente serait m,

$$y - y' = \frac{m + a}{1 - ma}(x - x').$$

En partant de l'équation de la perpendiculaire, on trouvera facilement la portion de cette droite comprise entre le point x', y' et la droite donnée, et il suffirait pour l'ob-

(*) Par LE POINT x', y', nous entendrons désormais LE POINT DONT LES COORDONNÉES SONT x' ET y'.

tenir, de substituer à x et à y dans l'expression

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2},$$

les valeurs qui résultent de l'élimination de ces quantités entre les équations des deux droites, mais il sera plus facile de chercher immédiatement les quantités $x-x'$ et $y-y'$. Pour les obtenir, on mettra l'équation

$$y=ax+b$$

sous cette forme

$$y-y'=a(x-x')-y'+ax'+b,$$

et en retranchant de cette nouvelle équation celle de la seconde droite,

$$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x'),$$

on aura,

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)(x-x')=y'-ax'-b,$$

d'où l'on tirera

$$x-x'=\frac{a(y'-ax'-b)}{1+a^2},$$

et par suite,

$$y-y'=-\frac{y'-ax'-b}{1+a^2};$$

substituant ces valeurs dans l'expression

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2},$$

on aura pour celle de la distance cherchée,

$$\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

On pourra, pour plus de généralité, éliminer $x-x'$ et $y-y'$ entre les deux équations

$$y=ax+b$$

et $$y-y'=\frac{m+a}{1-ma}(x-x'),$$

et les valeurs de ces quantités substituées dans la formule $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$, donneront pour l'expression de la distance entre le point dont les coordonnées sont x' et y' et celui où la première droite vient rencontrer la seconde :

$$\frac{y'-ax'-b}{m}\sqrt{\frac{1+m^2}{1+a^2}}.$$

en faisant successivement dans ce résultat m nul, égal à l'unité et infini, c'est-à-dire, en supposant successivement l'angle des deux droites nul, demi-droit, ou droit, on trouve :

$$\frac{1}{0},\ \frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{2},\ \frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}},$$

et les deux dernières valeurs comparées entr'elles nous font retrouver ce théorême :

Le rapport du côté du carré à la diagonale, est celui de l'unité à la racine carrée du nombre 2.

Proposons-nous maintenant de trouver l'équation d'une droite qui diviserait en deux parties égales l'angle de deux droites connues.

Soient les équations des deux droites,

$y=ax+b$ pour la première,

$y=a'x+b'$ pour la seconde,

l'équation de la droite cherchée sera de la forme

$$y = Ax + B.$$

Pour plus de simplicité, on concevra les deux droites données ramenées à l'origine des coordonnées ; l'angle qu'elles forment ne variera pas, et les trois équations se réduiront à :

$$\left.\begin{aligned} y &= ax \\ y &= a'x \end{aligned}\right\} \text{ pour les deux premières droites,}$$
$$y = Ax \text{ pour la droite cherchée.}$$

Cela posé, la droite cherchée fait avec la première droite un angle dont la tangente sera $\frac{a-A}{1+aA}$ et avec la seconde un angle qui aura pour tangente $\frac{A-a}{1+a'A}$; pour qu'elle divise l'angle des deux droites en deux parties égales, il faut que ces deux tangentes soient égales, d'où l'on tire pour déterminer le coefficient inconnu A, l'équation :

$$\frac{a-A}{1+aA} = \frac{A-a'}{1+a'A},$$

ou
$$A^2 - 2\frac{aa'-1}{a+a'}A - 1 = 0.$$

Cette équation du second degré, ayant son dernier terme négatif, aura ses deux racines réelles, d'où il suit que le problême proposé aura toujours deux solutions possibles ; et en effet, il est également résolu par la droite qui divisera en deux parties égales l'angle MAM' (*fig.* 3), et par celle qui divisera de la même manière le supplément de cet angle.

De plus, ces deux droites doivent évidemment se couper à angle droit, et cette circonstance est aussi retracée par l'équation

l'équation trouvée, puisqu'en désignant par A' et A'' ses deux racines, c'est-à-dire en posant

$$A' = \frac{aa' - 1 + \sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}{a+a'}$$

$$A'' = \frac{aa' - 1 - \sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}{a+a'}$$

on a par la théorie des équations

$$A'A'' = -1,$$

ou

$$A'A'' + 1 = 0.$$

Pour trouver le moyen de résoudre graphiquement le problême, soient M un point pris sur la première droite et M' un point pris sur la seconde; x' et y' les coordonnées de M, x'' et y'' celles de M'; il faudra d'abord que l'on ait

$$y' = ax', \; y'' = a'x'',$$

et si de plus les deux points M et M' doivent être à égale distance du point A, on aura encore

$$AM = AM' \text{ ou } x'\sqrt{1+a^2} = x''\sqrt{1+a'^2},$$

c'est-à-dire que l'on devra prendre

$$x'' = x'\sqrt{\frac{1+a^2}{1+a'^2}} \text{ et } y'' = a'x'\sqrt{\frac{1+a^2}{1+a'^2}}.$$

Cela posé, si l'on joint ces deux points par une droite MM', elle fera avec l'axe des x un angle dont la tangente $\frac{y'-y''}{x'-x''}$ aura pour expression

$$\frac{a - a'\sqrt{\frac{1+a^2}{1+a'^2}}}{1 - \sqrt{\frac{1+a^2}{1+a'^2}}}$$

et comme elle ne renferme point x', il est d'abord clair qu'elle restera la même quelque part que l'on prenne les points M et M', et par conséquent, que toutes les lignes qui joignent deux points pris sur les deux côtés d'un angle et à égale distance de son sommet, sont des lignes parallèles.

En réduisant ensuite cette expression, elle devient

$$\frac{aa' - 1 - \sqrt{(1+a^2)\ (1+a'^2)}}{a + a'}$$

c'est-à-dire précisément la valeur que donne pour A'' l'équation

$$A^2 - 2\,\frac{aa' - 1}{a + a'}\,A - 1 = 0\,;$$

d'où il suit de plus, que toutes ces parallèles le sont aussi à la ligne qui divise en deux également le supplément de l'angle proposé, et comme cette dernière est perpendiculaire sur celle qui divise l'angle lui-même en deux parties égales, il est facile d'en conclure que pour résoudre graphiquement le problême de la bissection de l'angle, il faut joindre par une droite deux points pris sur les deux côtés de l'angle et à égale distance du sommet et abaisser de ce sommet une perpendiculaire sur la droite.

Pour faire une application des valeurs trouvées pour A' et A'', supposons que dans le triangle rectangle AMP (*fig* 4), il faille déterminer la position du point B de la

ligne MP par la condition que la parallèle BC menée par ce point à AP soit égale à AC.

Prenons, pour plus de simplicité, le point A pour origine des coordonnées et le côté AP pour axe des x. Soient alors

$$\left.\begin{matrix} y = ax \\ x = b \end{matrix}\right\}$$ les équations connues des lignes AM et PM;

et y' l'ordonnée inconnue du point B; on aura

$$BC = AP - AD,\quad AC = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2},$$

et comme AD est l'abscisse du point de la droite AM dont l'ordonnée est y' ou la valeur de x qui, dans l'équation $y = ax$, répond à $y = y'$, on aura

$$BC = b - \frac{y'}{a},\quad AC = \frac{y'}{a}\sqrt{1 + a^2},$$

et par conséquent, pour déterminer y', l'équation

$$b - \frac{y'}{a} = \frac{y'}{a}\sqrt{1 + a^2},$$

de laquelle on tire

$$y' = \frac{ab}{1 + \sqrt{1 + a^2}},$$

ou, en multipliant haut et bas par $1 - \sqrt{1 + a^2}$,

$$y = b\,\frac{-1 + \sqrt{1 + a^2}}{a}.$$

Le point B ainsi déterminé, il est facile de voir que l'équation de la droite qui le joint avec le point A, sera

$$y = \frac{-1 + \sqrt{1+a^2}}{a}\, x,$$

et comme le coefficient de x, dans l'équation de cette droite, n'est autre chose que ce que devient la valeur générale trouvée précédemment pour A' lorsqu'on y fait $a' = 0$, ou lorsque la seconde droite se confond avec l'axe des x, il s'ensuit que pour trouver le point B, par une construction graphique, il suffira de diviser l'angle MAP en deux parties égales, et de prolonger jusqu'à la rencontre du côté MP, la droite qui effectuera cette division.

Comme il importe de se familiariser avec les différentes formes que peut prendre l'équation de la ligne droite, nous allons ajouter à ce que nous avons dit, la solution analytique de quelques problèmes de géométrie.

Proposons-nous d'abord de démontrer que *les trois lignes menées par le sommet de chaque angle d'un triangle et par le milieu du côté opposé se croisent toutes en un même point.*

Soit AMP (*fig.* 5) le triangle proposé; prenons, comme tout-à-l'heure, le point A pour origine des coordonnées, et le côté AP pour axe des x, et désignons par x'' l'abscisse du point P et par x', y' les coordonnées du point M.

Les coordonnées des milieux B, D, C des trois côtés seront

pour le premier, $\frac{y'}{2}$, $\frac{x'}{2}$,

pour le second, 0, $\frac{x''}{2}$,

pour le troisième, $\frac{y'}{2}$, $\frac{x'+x''}{2}$,

et par conséquent les équations des droites qui joindront chacun de ces points avec le sommet de l'angle opposé, seront

$$y = \frac{y'}{x' + x''} x \qquad \text{pour } AC,$$

$$y = \frac{y'}{x' - 2x''} (x - x'') \qquad \text{pour } BP,$$

et enfin $y = \frac{2y'}{2x' - x''} \left(x - \frac{x''}{2} \right)$ pour MD.

Cela posé, si on élimine y entre les deux premières équations, on aura, pour déterminer l'abscisse du point de rencontre des droites AC et BP, l'équation

$$\left(\frac{1}{x' + x''} - \frac{1}{x' - 2x''} \right) x = - \frac{x''}{x' - 2x''},$$

qui donnera

$$-3x''x = -x'' (x' + x'') \text{ ou } x = \frac{x' + x''}{3},$$

et par conséquent $y = \frac{y'}{3}$.

En éliminant ensuite y entre la première et la troisième équation, on aura pour déterminer l'abscisse du point d'intersection des droites AC et MD, l'équation

$$\left(\frac{1}{x' + x''} - \frac{2}{2x' - x''} \right) x = - \frac{x''}{2x' - x},$$

de laquelle on tirera la même valeur de x que tout-à-l'heure, et par suite, la même valeur de y.

Puisque les droites AC et BP ont dans leur intersection les mêmes coordonnées que les droites AC et MD,

il est clair que les trois droites AC, BP et MD se rencontrent en un même point O, dont les coordonnées sont $\frac{x' + x''}{3}$ et $\frac{y'}{3}$; et comme l'abscisse $\frac{x' + x''}{3}$ de ce point est les deux tiers de l'abscisse $\frac{x' + x''}{2}$ du point C, il sera sur la droite AC aux deux tiers à partir du point A ou au tiers à partir du point C.

On sait par la géométrie, que le centre du cercle circonscrit à un triangle AMP (*fig.* 6) est à l'intersection des perpendiculaires élevées sur le milieu de deux quelconques des trois côtés; il suit de là que *les perpendiculaires élevées sur les milieux des trois côtés d'un triangle se coupent au centre du cercle circonscrit*, et c'est ce qu'il nous sera facile de vérifier par le calcul.

En conservant les mêmes dénominations que dans la question précédente, on aura, pour l'équation du côté AM,

$$y = \frac{y'}{x'} x,$$

pour celle du côté MP,

$$y = \frac{y'}{x' - x''} (x - x''),$$

et enfin pour celle du côté AP,

$$y = 0;$$

d'où l'on tirera, pour les équations des perpendiculaires sur les milieux de ces côtés,

$$y-\frac{y'}{2}=-\frac{x'}{y'}\left(x-\frac{x'}{2}\right),$$

$$y-\frac{y'}{2}=\frac{x''-x'}{y'}\left(x-\frac{x'+x''}{2}\right),$$

$$x=\frac{x''}{2}.$$

En prenant la valeur que donne pour x la troisième de ces équations et la substituant dans chacune des deux premières, on aura, pour déterminer l'intersection des deux perpendiculaires BO et OC avec la troisième perpendiculaire OD, les équations

$$y-\frac{y'}{2}=-\frac{x'}{y'}\cdot\frac{x''-x'}{2},$$

$$y-\frac{y'}{2}=-\frac{x''-x'}{y'}\cdot\frac{x'}{2};$$

et comme elles donnent pour y la même valeur

$$\frac{y'}{2}-\frac{x'x''-x'^2}{2y'},$$

il s'ensuit que le point de rencontre des droites BO et OD est aussi celui des droites CO et OD, et par conséquent, que les trois perpendiculaires concourent en un même point qui a pour abscisse $\frac{x''}{2}$ et pour ordonnée $\frac{y'}{2}-\frac{x'x''-x'^2}{2y'}$.

Les équations des trois côtés restant toujours les mêmes, on aura

$$x = x',$$

$$y = \frac{x'' - x'}{y'}\, x,$$

$$y = -\frac{x'}{y'}\,(x - x''),$$

pour celles des perpendiculaires abaissées sur chacun d'eux du sommet de l'angle qui lui est opposé, et comme les deux dernières conduisent au même résultat, lorsqu'on y met pour x la valeur x' que donne la première, il est clair que, *dans tout triangle, les trois perpendiculaires menées des angles sur les côtés opposés, se croisent toutes en un même point;* il l'est également que les coordonnées de ce point sont ici x' et $x'\,\frac{x'' - x'}{y'}$.

De plus, les trois points que nous venons de déterminer jouissent d'une propriété remarquable à laquelle le calcul va encore nous conduire.

Concevons, en effet, que par le premier et par le second on mène une droite, elle fera avec l'axe des x un angle dont la tangente sera

$$\frac{y'^2 - 3x'\,(x'' - x')}{y'\,(x'' - 2x')};$$

si de même, par le premier point et par le troisième, on mène une droite, elle coupera l'axe des x sous un angle dont la tangente sera, réductions faites, la même que la précédente; donc, ces trois points sont en ligne droite; donc, *dans tout triangle, le point où se croisent les trois droites menées de chacun des angles au point milieu du côté opposé, celui où se croisent les trois perpendiculaires menées des mêmes angles sur ces côtés opposés et celui où se croisent les trois perpendiculaires*

élevées sur le milieu de chaque côté, sont toujours placés sur une même ligne droite.

Proposons-nous, pour autre exemple, d'inscrire un carré dans le triangle AMB (*fig.* 7).

Soient toujours le point A l'origine des coordonnées, AB l'axe des x, x' et y' les coordonnées du point M, et x'' l'abscisse du point B; les équations des trois côtés AM, BM et AB seront les mêmes que dans les problèmes précédens.

Cela posé, il est clair que le problème proposé revient à trouver sur AB un point c placé de manière qu'en élevant la perpendiculaire ac, et menant ensuite la parallèle ab à AB, on ait $ac = ab$. Désignons donc par α l'abscisse d'un tel point; la valeur de ac sera celle de y qui correspondra à $x = \alpha$, dans l'équation du côté AM, c'est-à-dire, $\frac{y'}{x'}\alpha$, et celle de ab sera la différence des abscisses Ad et Ac. La première de ces deux quantités étant la valeur que donne pour x l'équation du côté BM, lorsqu'on y fait $y = \frac{y'}{x'}\alpha$, aura pour expression :

$$\frac{\alpha(x' - x'') + x'x''}{x'},$$

ainsi l'on aura

$$ab = \frac{\alpha(x' - x'') + x'x''}{x'} - \alpha = \frac{x''(x' - \alpha)}{x'},$$

$$ac = \frac{y'}{x'}\alpha,$$

et par conséquent, pour déterminer α l'équation

$$y'\alpha = x'x'' - x'\alpha$$

qui donne $\alpha = Ac = \frac{x'x''}{y'+x''}$, et par suite $\frac{y'x''}{y'+x''}$ pour le côté du carré, en substituant la valeur de α dans l'équation $y = \frac{y'}{x'}x$ du côté AM.

On trouvera donc le point c en construisant l'une ou l'autre des deux expressions

$$\frac{x'x''}{y'+x''}, \quad \frac{y'x''}{y'+x''},$$

c'est-à-dire, en cherchant une quatrième proportionnelle à trois lignes connues. Mais, afin de l'obtenir d'une manière encore plus facile, on mènera la droite cM dont l'équation sera

$$y - y' = \frac{y'}{x' - \frac{x'x''}{y'+x''}}(x - x'),$$

ou

$$y - y' = \frac{y'+x''}{x'}(x - x'),$$

et l'on cherchera l'ordonnée du point où cette droite vient rencontrer l'axe des y. Cette ordonnée fournie par l'équation

$$y - y' = -\frac{y'+x''}{x'}x',$$

aura pour valeur $-x''$, et indiquera, par conséquent, qu'on trouvera tout de suite le point c en prolongeant l'axe des y d'une quantité $AC = AB$, et menant la droite CcM; il est facile de voir que cette construction conduit à cette autre : on joindra le point M avec les points C et D d'un carré construit sur AB, on élevera ensuite par les points

c, d, où AB sera rencontré, les perpendiculaires ca et db, et on mènera ab; la figure $abcd$ sera le carré demandé.

Nous terminerons ces applications par le problème suivant : étant donné un point N (*fig.* 8) dans un angle connu DAE, trouver l'équation d'une ligne DE menée par ce point, de manière que les parties ND, NE comprises entre le point N et les côtés de l'angle soient égales.

Soient $y = ax$ l'équation de la droite donnée, x' et y' les coordonnées du point N; l'équation de la droite cherchée sera de la forme

$$y - y' = A(x - x').$$

Pour avoir la grandeur de ND, il faudra éliminer $y - y'$ et $x - x'$ entre les équations des deux droites et substituer leurs valeurs dans l'expression $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$. On y parviendra immédiatement en écrivant la première sous cette forme

$$y - y' = a(x - x') - y' + ax',$$

et en la retranchant de la seconde; car on a alors

$$(A - a)(x - x') + y' - ax' = 0,$$

d'où l'on tire

$$x - x' = \frac{ax' - y'}{A - a},$$

par suite

$$y - y' = A\,\frac{ax' - y'}{A - a},$$

et par conséquent

$$ND = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} = \frac{ax' - y'}{A - a}\sqrt{1 + A^2}.$$

Pour obtenir la longueur de NE, on cherchera d'abord

AE, c'est-à-dire, la valeur que donne pour x l'équation

$$y - y' = A(x - x'),$$

lorsqu'on y fait $y = 0$: or cette hypothèse fournit l'équation

$$-y' = A(x - x');$$

on aura donc

$$AE = \frac{Ax' - y'}{A},$$

ce qui donnera

$$QE = AE - AQ = \frac{Ax' - y'}{A} - x' = -\frac{y'}{A},$$

et comme $NE = \sqrt{\overline{NQ}^2 + \overline{QE}^2}$, il en résultera

$$NE = \sqrt{y'^2 + \frac{y'^2}{A^2}} = \frac{y'}{A}\sqrt{1 + A^2}.$$

Egalant les deux valeurs de ND et de NE, on trouve pour déterminer le coefficient inconnu A, l'équation

$$\frac{ax' - y'}{A - a} = \frac{y'}{A},$$

qui donne

$$A = \frac{ay'}{2y' - ax'}.$$

Ainsi l'équation de la droite cherchée sera

$$y - y' = \frac{ay'}{2y' - ax'}(x - x'),$$

et si, pour la construire, on cherche AE ou l'abscisse du point où elle rencontrera l'axe des x, on trouvera

$$2\,\frac{ax-y'}{a}.$$

En comparant cette expression de AE avec l'expression générale trouvée plus haut pour la même quantité, on voit qu'elle est deux fois ce que deviendrait cette dernière si l'on y changeait A en a. Or le résultat de cette transformation représenterait l'abscisse du point où la parallèle menée par le point N au côté AD, viendrait rencontrer l'axe des x, on aura donc immédiatement la droite cherchée en menant par le point N la parallèle NF à AE, portant AF de F en E, et tirant DNE.

CHAPITRE II.

Du Cercle.

APRÈS la ligne droite vient naturellement la circonférence de cercle, qui, par sa régularité et la simplicité de sa description, présente les résultats les plus faciles à saisir. Pour suivre ici la marche qui nous a guidés plus haut, nous allons d'abord chercher l'équation de cette ligne, en traduisant en Algèbre une de ses propriétés, en exprimant, par exemple, qu'elle est engendrée par le mouvement d'un point qui ne cesse pas d'être à égale distance d'un autre point connu de position.

Soient donc x et y les coordonnées d'une position quelconque du point décrivant, α et ζ celles du point fixe dont il doit toujours être également éloigné, la distance de ces deux points sera $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\zeta)^2}$, et si r désigne la quantité à laquelle elle doit constamment être égale, on aura

$$(x-\alpha)^2+(y-\zeta)^2=r^2.$$

Telle est l'équation de la circonférence du cercle décrit du point α, ζ comme centre et avec le rayon r : les trois constantes qu'elle renferme serviront à indiquer en quoi une circonférence de cercle diffère pour la grandeur et la position d'une autre circonférence de cercle ; il est clair que ces trois constantes se rapportent à trois conditions différentes ; d'où suit ce premier théorême :

Trois conditions non identiques, comme trois points non en ligne droite, déterminent de grandeur et de position une circonférence de cercle.

Il est certaines hypothèses qui peuvent établir entre les constantes a, c, r, des relations particulières, et modifier, d'une manière remarquable, l'équation que nous venons de trouver.

Si, par exemple, l'origine des coordonnées est un point de la courbe, on aura

$$a^2 + c^2 = r^2,$$

et l'équation du cercle prendra cette forme plus simple,

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2cy = 0.$$

Si l'on suppose en même tems, que l'un des deux axes passe par le centre, et que le second touche la courbe au point où elle est rencontrée par le premier, on aura

$$a = 0 \text{ et } c = r,$$

ou

$$c = 0 \text{ et } a = r,$$

et l'équation précédente prendra l'une ou l'autre de ces formes :

$$x^2 + y^2 - 2ry = 0, \; x^2 + y^2 - 2rx = 0.$$

Enfin, si les deux axes passent par le centre, on aura à-la-fois

$$a = 0, \; c = 0,$$

et ces valeurs introduites dans l'équation générale la réduiront à

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Cette dernière équation, remarquable par sa symétrie et sa simplicité, est celle dont nous nous servirons particulièrement.

Il est facile de voir qu'elle retrace toutes les circonstances de la description du cercle ; car à $x = 0$ répond $y = r$; de même à $y = 0$ répond $x = r$; et enfin, puisqu'on a

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$
$$x = \sqrt{r^2 - y^2},$$

il est clair qu'on ne saurait supposer x et y plus grands que le rayon, c'est-à-dire, que tous les points qui ne seraient pas distans du centre de la quantité r, ne sauraient appartenir à la circonférence.

Au reste les différentes équations que nous venons d'obtenir donneraient toutes les mêmes résultats, et chacune d'elles renferme d'une manière plus ou moins complexe toutes les propriétés du cercle ; on tire, par exemple, de l'équation $x^2 + y^2 - 2rx = 0$, les proportions

$$2r - x : y :: y : x,$$
$$2r : \sqrt{x^2 + y^2} :: \sqrt{x^2 + y^2} : x ;$$

qui nous apprennent que si, d'un point M d'une circonférence de cercle, on abaisse sur le diamètre AB une perpendiculaire PM et qu'on tire la corde AM :

1°. *La perpendiculaire* PM *est moyenne proportionnelle entre les deux segmens* AP, PB *du diamètre.*

2°. *La corde* AM *est moyenne proportionnelle entre le diamètre* AB *et le segment adjacent* AP.

$2rx$ étant l'expression du carré de la corde AM, $2r(2r - x)$ sera celle du carré de la corde BM, et la somme de ces deux quantités étant $4r^2$ ou le carré du diamètre, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que le triangle AMB est rectangle en M, on tire encore de là cette autre proposition :

L'angle

L'angle AMB *est toujours droit, quelque part que soit le point* M *sur la courbe.*

Outre ces propriétés, la Géométrie élémentaire nous en a fait connaître plusieurs autres des droites qui rencontrent ou qui touchent une circonférence de cercle; nous allons les déduire ici de la combinaison des équations de ces deux lignes.

Soient donc $x^2 + y^2 = r^2$ l'équation d'un cercle ayant son centre à l'origine des coordonnées, et α, $\mathfrak{C}$ les coordonnées d'un point quelconque pris dans son plan : on aura

$$y - \mathfrak{C} = A(x - \alpha),$$

pour l'équation d'une droite menée par ce point, et

$$z^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \mathfrak{C})^2,$$

pour le carré de la distance z du point α, $\mathfrak{C}$ à un point quelconque de la direction de cette droite; éliminant $x - \alpha$ et $y - \mathfrak{C}$ entre cette équation et celle de la droite, il viendra

$$x - \alpha = \frac{z}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad y - \mathfrak{C} = \frac{Az}{\sqrt{1 + A^2}},$$

et par conséquent pour les coordonnées du point quelconque,

$$x = \alpha + \frac{z}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad y = \mathfrak{C} + \frac{Az}{\sqrt{1 + A^2}}.$$

Si l'on suppose maintenant que le point pris d'abord arbitrairement sur la droite, lui soit commun avec la circonférence de cercle, l'équation

$$x^2 + y^2 = r^2$$

se vérifiera, lorsqu'on y remplacera x et y par les valeur

que nous venons de trouver, ce qui fournira pour déterminer z, l'équation

$$z^2 + 2\frac{a+AC}{\sqrt{1+A^2}}z + a^2 + C^2 - r^2 = 0 \quad (1)$$

dont les deux racines sont les distances du point a, C aux points de rencontre de la droite et du cercle.

Dans une équation ordonnée de manière que le premier terme n'ait pour coefficient que l'unité, le coefficient du second terme pris avec un signe contraire est la somme des racines, et le dernier terme en est le produit; si donc on désigne par z' et z'' les racines de l'équation précédente, on aura ces deux autres :

$$z' + z'' = -2\frac{a+AC}{\sqrt{1+A^2}}, \quad (2)$$

$$z'z'' = a^2 + C^2 - r^2, \quad (3)$$

qui vont nous fournir plusieurs conséquences remarquables.

La première ne renfermant pas le rayon r, restera la même, quelle que soit cette quantité; d'où il est facile de conclure ces deux théorèmes :

1°. *Les circonférences concentriques sont partout également distantes.*

2°. *Si l'on mène une droite qui rencontre à-la-fois deux circonférences concentriques, des portions égales de cette droite seront interceptées entre les deux circonférences.*

Si, concevant ensuite le point a, C intérieur au cercle, on pose dans la même équation $z' = -z''$, on aura

$$a + AC = 0, \text{ ou } A = -\frac{a}{C}$$

et comme cette valeur de A est celle qui conviendrait à

l'équation de la perpendiculaire élevée au point a, c sur le rayon passant par ce point, il suit de là que,

La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde menée dans un cercle, passe par le centre du cercle et réciproquement.

L'équation (3) étant indépendante de la quantité A, aura lieu pour toutes les droites menées par le point a, c, de sorte qu'en désignant par z_1 et z_{11} les racines d'une équation qui correspondrait à une autre valeur de A, on aura encore

$$z_1 z_{11} = a^2 + c^2 - r^2,$$

et par conséquent

$$z' : z_1 :: z_{11} : z''.$$

Si $a^2 + c^2$ est plus grand que r^2, le point a, c est pris hors du cercle, et cette proposition indique que,

Les sécantes menées d'un même point pris hors d'un cercle sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures.

Si, au contraire, $a^2 + c^2$ est moindre que r^2, le point a, c est intérieur au cercle, et il résulte de la proportion que,

Les cordes d'un même cercle ou de cercles égaux se coupent en parties réciproquement proportionnelles.

Enfin $a^2 + c^2 - r^2$ étant le carré de la tangente, puisque (*fig.* 10)

$$a^2 + c^2 - r^2 = \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2,$$

l'équation (3) nous apprend que,

Si d'un même point pris hors d'un cercle, on mène une tangente et une sécante, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.

Concevons le point α, $\mathcal{C}$ en E (*fig.* 11 et 12), et après avoir élevé au carré l'équation (2), retranchons en l'équation (3) multipliée par 2, il viendra

$$z'^2 + z''^2 = \overline{EA}^2 + \overline{EC}^2 = \frac{4}{1+A^2}(\alpha + A\mathcal{C})^2 - 2(\alpha^2 + \mathcal{C}^2 - r^2).$$

En changeant, dans ce résultat A en $-\frac{1}{A}$, on aura la somme des carrés des distances ED, EB mesurées sur une corde BD perpendiculaire à AC et passant par le même point E, ce qui fournira cette autre équation :

$$\overline{ED}^2 + \overline{EB}^2 = \frac{4}{1+A^2}(\alpha A - \mathcal{C})^2 - 2(\alpha^2 + \mathcal{C}^2 - r^2)$$

qui, ajoutée à la précédente, donnera

$$\overline{EA}^2 + \overline{EB}^2 + \overline{EC}^2 + \overline{ED}^2 = 4r^2.$$

Cette équation rapportée à la figure 11, nous apprend que,

Si un point est pris hors d'un cercle, de manière qu'on puisse mener par ce point deux cordes orthogonales, la somme des carrés des distances de ce point aux points de rencontre des cordes et du cercle est égale au carré du diamètre ;

Et pour la figure 12 où les cordes AC, BD peuvent être regardées comme les diagonales du quadrilatère $ABCD$ inscrit au cercle, elle indique que,

Dans tout quadrilatère inscrit à diagonales orthogonales, la somme des carrés des quatre segmens des diagonales est égale au carré du diamètre.

A cause de

$$\overline{EA}^2+\overline{EB}^2=\overline{AB}^2$$
$$\overline{EB}^2+\overline{EC}^2=\overline{BC}^2$$
$$\overline{EA}^2+\overline{ED}^2=\overline{AD}^2$$
$$\overline{EC}^2+\overline{ED}^2=\overline{CD}^2,$$

la même équation donne

$$\overline{AD}^2+\overline{BC}^2=4r^2$$
$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=4r^2,$$

d'où il suit, pour la figure 11, que,

Dans tout quadrilatère inscrit et tel que deux côtés opposés se rencontrent à angle droit, la somme des carrés des deux diagonales et celle des carrés des deux côtés non perpendiculaires l'un sur l'autre, seront égales entr'elles et au carré du diamètre,

Et pour la fig. 12, que,

Dans tout quadrilatère inscrit à diagonales orthogonales, la somme des carrés de deux quelconques des côtés opposés sera égale au carré du diamètre.

En résolvant l'équation (1), et prenant la différence de ses racines, on aura pour la portion de la droite comprise dans le cercle,

$$\frac{2\sqrt{r^2(1+A^2)-(C-A\alpha)^2}}{\sqrt{1+A^2}};$$

c'est, en continuant de supposer le point α, C en E, l'expression de la corde AC.

Il sera facile d'en déduire, pour l'expression de la corde BD,

$$\frac{2\sqrt{r^2(1+A^2)-(CA+\alpha)^2}}{\sqrt{1+A^2}};$$

et en faisant la somme des carrés de ces quantités, on aura

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 8r^2 - 4(a^2 + c^2),$$

c'est-à-dire que,

Si d'un point quelconque pris sur la surface d'un cercle, on mène deux cordes quelconques orthogonales, la somme des carrés de ces deux cordes sera toujours égale au double carré du diamètre, moins quatre fois le carré de la distance du point d'intersection des deux cordes au centre du cercle.

Toutes ces propriétés sont vraies, quelque part que soit dans l'intérieur du cercle le point a, c; mais il est facile de sentir qu'en le supposant hors du cercle, il faut, pour qu'elles continuent d'avoir lieu, que l'on puisse mener par ce point deux cordes perpendiculaires entr'elles; or la dernière équation

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 8r^2 - 4(a^2 + c^2)$$

cessant d'exprimer un résultat réel lorsque $8r^2$ est plus grand que $4(a^2+c^2)$, c'est-à-dire, quand on a

$$\sqrt{a^2 + c^2} > r\sqrt{2},$$

nous indique que cette circonstance n'est possible, qu'autant que le point a, c ne dépasse pas la circonférence concentrique dont le rayon est le côté du carré inscrit dans la première circonférence.

Au reste ces propriétés, comme celles que nous avons précédemment exposées, ont été rapportées ici, moins pour l'intérêt qu'elles peuvent présenter par elles-mêmes, que pour montrer comment on peut, par la seule force de l'analyse, faire sortir d'un petit nombre de principes toutes les vérités qu'ils renferment.

La différence

$$\frac{2\sqrt{r^2(1+A^2)-(C-A\alpha)^2}}{\sqrt{1+A^2}}$$

exprime la portion de la droite $y-C=A(x-\alpha)$ qui se trouve comprise dans le cercle, quelle que soit d'ailleurs la position du point α, C; elle sera nulle, si la droite touche la circonférence : on a donc pour déterminer A ou la tangente de l'angle qu'elle doit faire alors avec l'axe des x, l'équation du second degré

$$r^2(1+A^2)-(C-A\alpha)^2=0,$$

ou
$$A^2+2\frac{\alpha C}{r^2-\alpha^2}A+\frac{r^2-C^2}{r^2-\alpha^2}=0,$$

qui donnera

$$A=-\frac{\alpha C\pm r\sqrt{\alpha^2+C^2-r^2}}{r^2-\alpha^2}.$$

Par un point donné, on pourra donc, en général, mener deux tangentes à un cercle; on aura les équations de ces tangentes en substituant les deux valeurs de A dans l'équation

$$y-C=A(x-\alpha),$$

et les coordonnées des points de contact s'obtiendront en remplaçant z et A par leurs valeurs dans les formules

$$x=\alpha+\frac{z}{\sqrt{1+A^2}},\quad y=C+\frac{Az}{\sqrt{1+A^2}}.$$

Si α^2+C^2 est moindre que r^2, c'est-à-dire, si le point α, C est donné dans le cercle, les deux valeurs de A deviennent imaginaires, et on sent, en effet, qu'il est impossible de mener une tangente par un point ainsi situé; mais, si $\alpha^2+C^2=r^2$, c'est-à-dire, si le point est sur la

circonférence, elles se réduisent à une seule :

$$= -\frac{\alpha C}{r^2 - \alpha^2} = -\frac{\alpha}{C};$$

ainsi l'équation de la droite, menée tangentiellement à un cercle par un point pris sur sa circonférence, sera

$$y - C = -\frac{\alpha}{C}(x - \alpha),$$

ou en réduisant

$$x\alpha + yC = r^2,$$

et il est facile de voir qu'elle est celle de la perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point de contact, puisque ce dernier aura pour équation

$$y = \frac{C}{\alpha}\, x.$$

Au reste, cette circonstance était indiquée, et même pour toutes les positions du point α, C, par l'équation

$$r^2(1 + A^2) - (C - A\alpha)^2 = 0,$$

car $C - A\alpha$ étant l'ordonnée à l'origine de la tangente, A la tangente trigonométrique de l'angle que cette tangente fait avec les x et, par conséquent, $\sqrt{1 + A^2}$ le rapport du rayon au cosinus de cet angle, la relation

$$C - A\alpha = r\sqrt{1 + A^2}$$

que fournit l'équation citée, renferme la condition nécessaire pour que le triangle formé par cette ordonnée, la tangente et le rayon mené au point de contact, ait un angle droit dont ce point de contact sera le sommet.

On tire de là un moyen simple de mener une tangente à un cercle par un point donné sur sa circonférence ; mais il est difficile de lire dans la valeur générale de A la construction géométrique qu'il faut effectuer quand le point est donné hors du cercle ; pour l'obtenir, nous remarquerons que si, entre l'équation générale de la tangente et celle du cercle, on élimine le rayon, on aura, entre x, y, α et $\mathfrak{C}$, une équation qui appartiendra à la suite des points de contact de tous les cercles qui ont leur centre à l'origine des coordonnées. Cette équation sera donc celle de la ligne unique qui contient tous ces points de contact et qui les détermine par ses intersections avec la suite des cercles touchés.

Or, si l'on suppose, pour plus de simplicité, que le point α, $\mathfrak{C}$ est sur l'axe des x, on aura $\mathfrak{C} = 0$, et l'équation de la tangente deviendra

$$y = \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}}(x - \alpha);$$

c'est donc entre cette équation et l'équation

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

qu'il faut éliminer le rayon.

Pour y parvenir plus facilement, on élevera la première de ces équations au carré et, en transposant, on lui donnera cette forme :

$$r^2(x^2 + y^2) - 2r^2\alpha x + \alpha^2(r^2 - y^2) = 0,$$

que l'on changera en cette autre :

$$r^4 - 2r^2\alpha x + \alpha^2 x^2 = 0,$$

ou simplement,

$$r^2 - ax = 0,$$

en mettant pour $x^2 + y^2$ et $r^2 - y^2$ leurs valeurs prises dans l'équation du cercle.

L'équation finale demandée sera donc

$$x^2 + y^2 - ax = 0;$$

c'est-à-dire celle d'un autre cercle dont un diamètre est la droite qui joint le centre commun des cercles avec le point de l'axe des x dont l'abscisse est a; ainsi, pour mener une tangente à un cercle, par un point A (*fig.* 13.) pris au dehors, il faudra joindre le point A et le centre par la ligne droite CA, et le cercle décrit sur cette ligne comme diamètre viendra couper le premier en deux points M et M' qui seront les points de contact.

On pouvait, au reste, trouver immédiatement l'équation $r^2 - ax = 0$, en observant que la tangente menée par le point A devant former avec le rayon CM mené au point de contact, un triangle ACM toujours rectangle en M, on a, à cause de la perpendiculaire MP abaissée de l'angle droit sur l'hypothénuse, $\overline{CM}^2 - CA \times CP = 0$; mais l'analyse précédente est peut-être plus élégante et plus directe.

Si la droite dont l'équation est en général

$$y - c = A(x - a),$$

ne doit pas toucher la circonférence, mais être telle que sa partie comprise dans le cercle soit d'une grandeur donnée m, m étant plus petit que $2r$, on aura

$$\frac{2\sqrt{r^2(1 + A^2) - (c - Aa)^2}}{\sqrt{1 + A^2}} = m,$$

et par conséquent, pour déterminer A, l'équation

$$A^2 + 2\frac{\alpha\mathfrak{C}}{p^2-\alpha^2}A + \frac{p^2-\alpha^2}{p^2-\mathfrak{C}^2} = 0,$$

dans laquelle p représente

$$\sqrt{r^2 - \frac{m^2}{4}},$$

ou la perpendiculaire abaissée du centre sur une corde $= m$.

Cette équation étant formée en p, comme celle qu'on a trouvée plus haut l'était en r, donnera pour A la tangente de l'angle que doit faire avec l'axe des x une droite menée par le point α, $\mathfrak{C}$, de manière à toucher une circonférence de cercle décrite du même centre que la première et avec un rayon p, et indique par conséquent, que pour résoudre graphiquement le problême, il faudra, dans le cercle donné, tirer une corde $= m$, et ayant décrit de son centre et avec la distance de ce centre à la corde, une circonférence de cercle, mener par le point donné une tangente à cette circonférence.

Au lieu de faire passer la tangente par un point donné, pour achever de déterminer sa position, nous allons supposer à présent, qu'elle doit toucher à-la-fois deux cercles; et, pour plus de simplicité, nous placerons le centre de l'un des cercles à l'origine des coordonnées, et celui de l'autre en un point de l'axe des x, de manière que

$$x^2 + y^2 = r^2$$

étant l'équation du premier cercle,

$$(x-a)^2 + y^2 = r'^2$$

soit celle du second.

Cela posé, désignons par α et γ les coordonnées d'un point pris sur la circonférence du premier cercle, on aura

$$y = \frac{\gamma}{\alpha} x,$$

pour l'équation du rayon mené par ce point, et

$$y = \frac{\gamma}{\alpha} (x - a)$$

pour celle du rayon qu'on peut lui mener parallèlement dans le second cercle. Pour déterminer les coordonnées du point où ce second rayon rencontre la circonférence du cercle auquel il appartient, il faudra éliminer x et y entre les équations

$$y = \frac{\gamma}{\alpha} (x - a), \quad (x - \alpha)^2 + y^2 = r'^2,$$

ce qui donnera en observant que $\alpha^2 + \gamma^2 = r^2$,

$$x = \frac{ar \pm \alpha r'}{r} \quad \text{et} \quad y = \pm \frac{\gamma r'}{r};$$

ainsi, la droite qui joindra les extrémités de ces deux rayons parallèles, aura pour équation

$$y - \gamma = \frac{\gamma (r \mp r')}{\alpha (r \mp r') - ar} (x - \alpha),$$

et l'abscisse du point où elle rencontrera l'axe des x, c'est-à-dire la valeur de x qui répondra dans cette équation à $x = 0$, sera

$$x = \frac{ar}{r \mp r'}.$$

Cette valeur ne renfermant ni α ni γ, restera la même,

quelles que soient ces quantités, ou quel que soit le point pris sur le premier cercle; elle appartiendra donc à toutes les droites qui joindront les extrémités de deux rayons parallèles, et par conséquent aussi à la tangente cherchée.

Il suit de là, qu'on résoudra graphiquement le problême proposé, en menant dans les deux cercles des rayons parallèles, joignant les extrémités de ces rayons par une droite que l'on prolongera jusqu'à l'axe des x, et menant ensuite par le point de rencontre une tangente à l'un des cercles.

La valeur trouvée plus haut pour x résultant d'une équation du second degré, il y aura toujours deux droites qui résoudront le problême; l'une viendra rencontrer la droite qui joint les centres à une distance du premier $= \frac{ar}{r-r'}$, et l'autre à une distance $= \frac{ar}{r+r'}$.

La première de ces deux valeurs sera positive et plus grande que la distance des deux centres, si r est plus grand que r'; elle sera négative, si r est moindre que r'; ainsi, des deux tangentes cherchées, l'une ne rencontrera la droite qui joint les centres, que sur son prolongement et toujours dans le sens du plus petit cercle, de manière à toucher les deux circonférences d'un même côté.

La seconde valeur $\frac{ar}{r+r'}$, sera toujours positive et moindre que a; ainsi, la seconde des deux tangentes coupera toujours l'axe des x entre les deux centres et de manière à toucher les deux cercles, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe des x.

Enfin, si $r = r'$, la première valeur devient infinie, et la seconde $= \frac{a}{2}$, c'est-à-dire, que si les deux cercles ont le même rayon, la première des deux tangentes est paral-

lèle à la droite qui joint les centres et la seconde divisera en deux parties égales la distance de ces points.

Il sera facile maintenant de résoudre cette question :

Deux cercles étant donnés de grandeur et de position, les couper par une droite de manière que les parties interceptées soient égales à m, *cette quantité* m *n'étant pas plus grande que le diamètre du plus petit cercle.*

Il est visible, en effet, qu'il suffira de mener dans chaque cercle une corde égale à m, de décrire deux circonférences concentriques aux premières, et ayant réciproquement pour rayon les distances des cercles à ces cordes, et de mener ensuite une tangente commune à ces deux circonférences ; cette tangente sera la ligne demandée.

La proposition précédente conduit encore à une démonstration assez simple du théorème suivant, et nous la rapporterons ici comme une nouvelle application de ce que nous avons déjà vu.

Trois cercles quelconques étant donnés, si, en les considérant deux à deux, on leur mène des tangentes extérieures jusqu'à ce qu'elles se coupent, les trois points d'intersection que l'on obtiendra de cette manière seront en ligne droite.

Soient C et C' les deux premiers cercles ayant respectivement pour équation

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$(x - a)^2 + y^2 = r'^2,$$

et soit r'' le rayon d'un troisième cercle C'' ayant son centre quelque part en un point α, ζ et par conséquent pour équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \zeta)^2 = r''^2;$$

il faut d'abord déterminer les coordonnées des trois points en question.

Or, la proposition précédente nous a déjà donné pour les cordonnées du point de rencontre des tangentes aux cercles C et C',

$$x = \frac{ar}{r - r'}, \quad y = 0.$$

Si l'on remarque ensuite que l'abscisse du point de rencontre des tangentes aux cercles C et C'' est précisément la même que si le cercle C'' avait son centre sur l'axe des x et à une distance α de l'origine, et que l'ordonnée, en tant que ce point se trouve aussi sur la droite qui joint les centres, est fournie par l'équation $y = \frac{c}{a}x$, on aura pour les coordonnées du second point de rencontre,

$$x = \frac{\alpha r}{r - r''}, \quad y = \frac{cr}{r - r''}.$$

Enfin, pour trouver les coordonnées du point d'intersection des tangentes aux cercles C' et C'', on concevra que l'axe des y se mouvant parallèlement à lui-même, vienne à passer par le centre de C'; C' et C'' seront alors, l'un par rapport à l'autre, dans les circonstances où C' et C'' se trouvaient tout-à-l'heure, et d'après le modèle que l'on vient de trouver, on aura

$$x' = \frac{\alpha' r'}{r' - r''}, \quad y = \frac{cr'}{r' - r''},$$

pour les coordonnées de ce troisième point, les abscisses x' se mesurant à partir du centre de C'; il sera facile de les rapporter à la première origine, en observant que si l'on continue de désigner par x et α les abscisses qui partent de ce point, on a

$$x' = a - x, \quad a' = a - a,$$

et l'on aura enfin pour les coordonnées du troisième point de rencontre

$$x = \frac{ar - ar'}{r' - r''}, \quad y = \frac{cr'}{r' - r''}.$$

Cela posé, si par le premier des trois points on fait passer une droite, son équation sera de la forme

$$y = A\left(x - \frac{ar}{r - r'}\right),$$

et si l'on détermine ensuite le coefficient A par la condition que cette droite passe successivement par le second et le troisième point, on trouvera dans l'un et l'autre cas la même valeur

$$A = \frac{c(r - r')}{a(r - r') - a(r - r'')},$$

ce qui démontre le théorème en question.

Reprenons les deux équations

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (x - a)^2 + y^2 = r'^2$$

et éliminons entr'elles les deux indéterminées x et y, on aura

$$x = \frac{a^2 + r^2 - r'^2}{2a} \quad y = \pm \frac{\sqrt{4a^2r^2 - (a^2 + r^2 - r'^2)^2}}{2a}$$

pour les coordonnées des points d'intersection des deux cercles ; et comme l'abscisse x est la même pour les deux valeurs de y, il est d'abord clair que *ces points sont sur une corde perpendiculaire à l'axe des* x, *ou à la droite qui joint les centres*; de plus, *cette corde est divisée par l'axe en*

en deux parties égales, puisque les deux valeurs de y ne diffèrent que par le signe.

On voit ensuite qne ces deux valeurs de y ne peuvent être réelles qu'autant que l'on a

$$2ar > a^2 + r^2 - r'^2$$

c'est-à-dire

$$r + r' > a \text{ et } a + r' > r;$$

d'où il suit que *les deux cercles ne peuvent se couper qu'autant que la somme de leurs rayons est plus grande que la distance des centres, et qu'en même temps le plus grand rayon est moindre que la somme du plus petit et de la distance des centres.*

Enfin, si

$$2ar = a^2 + r^2 - r'^2,$$

ce qui donne

$$a = r + r' \text{ ou } a = r - r'.$$

on a $y = 0$ et $x = r$,

c'est-à-dire, qu'il n'y a plus alors qu'un point de contact qui est placé sur l'axe des x.

Si $r + r' = a$, c'est-à-dire, *si la distance des centres est égale à la somme des rayons, les deux cercles se toucheront extérieurement;* mais, si $a = r - r'$, c'est-à-dire, *si la distance des centres est égale à la différence des rayons, ils se toucheront intérieurement.*

Aux deux cercles qui ont pour rayon r et r', joignons celui qui a pour équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - 6)^2 = r''^2$$

et remplaçons successivement $x^2 + y^2$ par la valeur de cette quantité prise dans chacune des équations

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$(x - \alpha)^2 + y^2 = r'^2,$$

il viendra

$$2\alpha x + 2\zeta y + r''^2 - \alpha^2 - \zeta^2 = r^2$$
$$2\alpha x + 2\zeta y + r'''^2 - \alpha^2 - \zeta^2 = 2ax + r'^2 - a^2$$

pour les équations des deux droites suivant lesquelles ce nouveau cercle coupe chacun des deux autres.

Cela posé, si l'on se transporte au point d'intersection de ces deux droites, ces deux équations auront le même premier membre et l'abscisse du point cherché sera donnée par l'équation

$$2ax = a^2 + r^2 - r'^2,$$

qui, comme on l'a vu plus haut, est aussi celle de la droite qui joint les points d'intersection du premier et du second cercle.

Il suit de là que le point d'intersection des deux dernières droites se trouve à l'intersection de chacune d'elles avec la première, et que par conséquent,

Trois circonférences étant tracées dans un même plan, si l'on suppose que les deux premières se coupent aux deux points a *et* a′, *que la première coupe la troisième aux points* b *et* b′ *et qu'enfin la seconde coupe la troisième aux points* c *et* c′; *les droites* aa′, bb′, cc′ *se couperont toutes trois au même point.*

D'où il suit réciproquement que,

Si deux circonférences tracées dans un même plan se coupent aux points a, a′, *et qu'ayant mené la droite* aa′, *on mène par un point pris à volonté sur cette droite deux cordes, l'une* bb′ *dans la première circonférence, l'autre* cc′ *dans la seconde, les quatre extrémités* b, b′, c, c′, *de ces deux cordes se trouveront nécessairement toutes dans une même circonférence.*

Concevons que les deux cercles qui ont pour équation

$$x^2+y^2=r^2,$$
$$(x-a)^2+y^2=r'^2,$$

soient disposés de manière à se couper, et proposons-nous de mener une droite par un des points d'intersection, de manière que des parties égales de cette droite soient interceptées dans chaque circonférence.

On reprendra, pour y parvenir, la quantité

$$\frac{2\sqrt{r^2(1+A^2)-(C-A\alpha)^2}}{\sqrt{1+A^2}},$$

qui, comme on l'a vu page 37, est l'expression d'une corde menée par un point quelconque α, C, dans la circonférence qui a pour rayon r et en y' changeant α en $\alpha-a$, et r en r', on aura :

$$\frac{2\sqrt{r'^2(1+A^2)-(C-A\alpha+Aa)^2}}{\sqrt{1+A^2}},$$

pour la partie de la même corde interceptée par la circonférence dont le rayon est r' : α et C dans ces deux quantités, devant représenter les coordonnées d'un des points d'intersection des deux cercles, sont les valeurs générales trouvées précédemment pour x et y; A, ou la tangente de l'angle que la droite doit faire avec l'axe des x, est l'inconnue qu'il s'agit de déterminer, et sa valeur résultera de l'équation que fournira l'égalité des deux cordes, c'est-à-dire, de l'équation

$$\frac{2\sqrt{r^2(1+A^2)-(C-A\alpha)^2}}{\sqrt{1+A^2}}=\frac{2\sqrt{r'^2(1+A^2)\ (C-A\alpha+Aa)^2}}{\sqrt{1+A^2}}$$

ou

$$(r^2 - r'^2 + a^2 - 2ax)\,A^2 + 2a\mathcal{C}A + r^2 - r'^2 = 0.$$

Or, à cause de $\alpha = \frac{r^2 - r'^2 + a^2}{2a}$, on a

$$r^2 - r'^2 + a^2 - 2ax = 0 \quad \text{et} \quad r^2 - r'^2 = -a^2 + 2a\alpha;$$

ainsi le terme multiplié par A^2 disparaîtra, et l'équation deviendra

$$2\mathcal{C}A - a + 2\alpha = 0,$$

c'est-à-dire que des deux valeurs de A, l'une sera infinie, et l'autre égale à $\frac{a - 2\alpha}{2\mathcal{C}}$; ou, en d'autres termes, des deux lignes qui, menées par le point donné, pourront satisfaire à l'énoncé du problême, l'une sera perpendiculaire à l'axe des x, ce sera la droite même qui joint les deux points d'intersection, et l'autre fera avec le même axe un angle qui aura pour tangente,

$$A = \frac{a - 2\alpha}{2\mathcal{C}}.$$

On pourrait, substituant cette valeur de A dans l'expression

$$\frac{2\sqrt{r^2(1 + A^2) - (\mathcal{C} - A\alpha)^2}}{\sqrt{1 + A^2}},$$

trouver la grandeur de la corde et construire la seconde droite en portant cette corde dans l'un ou l'autre des deux cercles et à partir du point d'intersection; mais on y parviendra plus facilement en remarquant que la dernière égalité donne $\frac{a}{2}$ pour la valeur de $\alpha + A\mathcal{C}$; car, cette quantité

étant précisément la valeur de x qui, dans l'équation

$$y - \mathcal{C} = A(x - \alpha)$$

répond à $y = 0$, ou l'abscisse du point où la perpendiculaire élevée par le point donné sur la droite cherchée peut rencontrer l'axe des x, il suffira évidemment de mener une droite par le milieu de la distance des deux cercles et par le point d'intersection proposé; la perpendiculaire élevée par le même point, sur cette droite, sera la ligne demandée.

Nous terminerons cet exposé des principales propriétés du cercle, en faisant voir comment on peut se servir de cette courbe pour représenter en lignes les racines de l'équation du second degré.

Soit d'abord l'équation

$$x^2 - px + q = 0;$$

puisqu'on en tire

$$q = px - x^2,$$

il est visible que les valeurs de x sont les abscisses de deux points d'une circonférence de cercle décrite d'un rayon $= \frac{p}{2}$, pour chacun desquels l'ordonnée est $\sqrt{q}$. On décrira donc (*fig.* 14) un cercle avec un rayon $AC = \frac{p}{2}$, et ayant mené un diamètre quelconque DE, on élevera à l'extrémité D une perpendiculaire $DF = \sqrt{q}$; par le point F, on mènera FM' parallèle à DE, et en abaissant des deux points M et M', où cette droite rencontrera la circonférence, les ordonnées MP et $M'P'$ qui seront toutes deux égales à $\sqrt{q}$; les racines de l'équation proposée seront représentées par les abscisses correspondantes DP et DP'.

Si $q = \frac{p^2}{4}$, la parallèle FM' ne fera que toucher la circonférence du cercle, et les deux racines seront représentées par le rayon; mais si q est plus grand que $\frac{p^2}{4}$, la ligne FM' ne rencontrera pas le cercle, et l'on sait en effet que, dans ce cas, l'équation $x^2 - px + q = 0$ a ses deux racines imaginaires.

Les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$, ne différant que par le signe de celles de l'équation précédente, s'obtiendront par la même construction.

Quant à l'équation $x^2 + px - q = 0$, qui donne

$$x + p : \sqrt{q} :: \sqrt{q} : x,$$

il faudra, pour trouver en lignes la valeur de l'inconnue, mener à un cercle, dont le rayon ne soit pas moindre que $\frac{p}{2}$, une tangente $= \sqrt{q}$, par l'extrémité de cette tangente mener une sécante telle que sa partie interceptée dans le cercle soit égale à p, et la partie extérieure de cette sécante sera la valeur de x.

On sait mener une droite par un point donné de manière que sa partie comprise dans un cercle de rayon connu soit d'une grandeur donnée; ainsi la solution que nous venons d'indiquer pourra s'exécuter facilement; mais, il sera plus simple encore de décrire le cercle avec un rayon $= \frac{p}{2}$, parce que la sécante devant alors passer par le centre, on l'obtiendra immédiatement.

Cette construction n'étant sujette à aucune exception, il sera toujours possible d'avoir les valeurs de x, et l'on sait, en effet, que l'équation $x^2 + px - q = 0$ a toujours ses racines réelles, quel que soit le rapport de grandeur des quantités p et q.

Il resterait à considérer l'équation $x^2 - px - q = 0$; mais comme ses racines ne diffèrent que par le signe de celles de l'équation précédente, on les trouvera par le même procédé.

Descartes, dans la Géométrie duquel on trouve pour la première fois cette solution graphique des équations du second degré, rapporte ensuite le problème suivant :

Etant donnés le carré AQPM, *et la droite* AE (fig. 15), *trouver le point* C *du côté* QM, *tel qu'en tirant* AC *qui rencontrera* PM *en* B, *on ait* BC = AE.

Nous allons résoudre ce problème à l'aide des considérations que nous avons précédemment établies, et pour y parvenir de la manière la plus simple, nous supposerons que AP et AQ prolongés, soient les deux axes des x et des y, que x soit l'abscisse inconnue du point C, et que l'ordonnée du même point, connue et égale au côté PM du carré donné, soit représentée par y'.

Cela posé, l'équation de la droite AC sera $y = \frac{y'}{x'}x$, et en y changeant x en y', elle donnera $\frac{y'^2}{x'}$ pour l'ordonnée PB du point B.

L'expression de la distance BC sera donc

$$\sqrt{(x'-y')^2+\left(y'-\frac{y'^2}{x'}\right)^2},$$

et en l'égalant à $AE = m$, développant et faisant disparaître les dénominateurs, on aura, pour déterminer l'inconnue x', l'équation du quatrième degré

$$(x'^2+y'^2)^2 - 2x'y'(x'^2+y'^2) = m^2x'^2.$$

Si à chaque membre de cette équation on ajoute $x'^2y'^2$,

le premier membre deviendra un carré parfait, et en extrayant la racine de part et d'autre et transposant, on aura

$$x'^2+y'^2-x'\,(y'\pm\sqrt{m^2+y'^2})=0;$$

c'est-à-dire, que l'équation du quatrième degré trouvée plus haut, se décomposera en ces deux autres du second :

$$x'^2+y'^2-x'\,(\sqrt{m^2+y'^2}+y')=0,$$

$$x'^2+y'^2+x'\,(\sqrt{m^2+y'^2}-y')=0.$$

Sans aller plus loin, il est clair, d'après la forme de ces équations, que le point x', y' sera placé sur l'un ou l'autre des deux cercles auxquels elles appartiennent : ces deux cercles auront leur centre sur l'axe des x, et pour tangente commune l'axe des y : le premier, placé à droite de cet axe, aura pour diamètre $\sqrt{m^2+y'^2}+y'$, et le second, placé à gauche du même axe, aura pour diamètre $\sqrt{m^2+y'^2}-y'$.

La solution graphique du problème, ou la détermination du point C, et de ceux qui, comme lui, peuvent satisfaire à la question, s'exécutera, par conséquent, en portant à droite et à gauche du point P des parties PD, PD' égales à $\sqrt{m^2+y'^2}$, ce qui fournira deux distances, l'une $AD=\sqrt{m^2+y'^2}+y'$, et l'autre $AD'=\sqrt{m^2+y'^2}-y'$; décrivant sur ces distances comme diamètres des circonférences de cercle, et prolongeant le côté QM du carré donné jusqu'à la rencontre de ces circonférences ; les quatre points C, C', C'', C''', que l'on trouvera par ce moyen, seront situés convenablement, c'est-à-dire que les quatre distances BC, $B'C'$, $B''C''$, $B'''C'''$ seront égales entr'elles, et à la distance AE.

Il est à remarquer que les deux dernières solutions ne pourront s'obtenir qu'autant que le rayon

$$\frac{AD'}{2} = \frac{\sqrt{m^2+y'^2}-y'}{2}$$

du cercle qui les fournit sera plus grand que le côté $AQ=y'$ du carré donné, c'est-à-dire, qu'autant que l'on aura $m^2>8y'$, et qu'elles se réduiront à une seule, quand ces deux quantités seront égales. Ainsi, suivant les données du problême, deux, trois ou quatre points pourront satisfaire aux conditions qu'il renferme.

CHAPITRE III.

Des Courbes du second degré.

L'ÉQUATION du cercle n'est qu'un cas particulier de l'équation générale du second degré à deux indéterminées,

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0. \qquad (1)$$

Elle répond au cas où le coefficient B étant nul dans cette équation, les coefficiens A et C sont égaux; mais pour toutes les autres valeurs de ces quantités, on a des courbes dont la nature et les affections s'écartent plus ou moins de la nature et des affections du cercle : c'est de la détermination de ces courbes et de la recherche de leurs principales propriétés que nous allons nous occuper maintenant.

Il est d'abord facile de sentir que l'équation (1) peut n'être pas ici sous sa forme la plus simple, qu'il peut exister tel système d'axes par rapport auxquels elle se présentera sous une forme moins compliquée; il importe donc de déterminer, en premier lieu, des formules à l'aide desquelles on puisse passer d'un système de coordonnées à un autre.

Ces formules doivent être telles, que substituées dans l'équation d'une ligne, elles n'en changent pas le degré; ainsi elles ne peuvent admettre ni les puissances des nouvelles coordonnées autres que la première, ni les produits de ces coordonnées, c'est-à-dire, qu'elles ne peuvent être que de cette forme :

$$x=mu+nt+a, \qquad y=pu+qt+b,$$

x et y étant les coordonnées primitives, u et t les coordon-

nées nouvelles, et m, n, p, q, a et b des constantes qui déterminent la position des nouveaux axes par rapport aux premiers : cherchons à définir ces constantes.

Nous supposerons les axes primitifs AX, AY, (*fig.* 16) perpendiculaires entr'eux, et qu'il s'agit d'exprimer les coordonnées $AP=x$, $PM=y$ relatives aux axes AX et AY par deux autres coordonnées $AQ=u$, $QM=t$, rapportées aux axes AU, AT dont on connaît la position à l'égard des premiers par les angles $UAX=q$, $TAX=p$, que chacun de ces nouveaux axes fait avec l'axe primitif des x.

Ayant mené QR parallèle à AX, et QS parallèle à AY, on aura

$$AP=AS+QR, \qquad PM=QS+MR;$$

mais les triangles rectangles AQS, QMR donneront

$$1 : \sin q : \cos q :: u : QS : AS$$
$$1 : \sin p : \cos p :: t : MR : QR,$$

et par conséquent

$$QS=u \sin q$$
$$AS=u \cos q$$
$$MR=t \sin p$$
$$QR=t \cos p,$$

ainsi l'on aura

$$x=u \cos q+t \cos p, \qquad y=u \sin q+t \sin p.$$

Telles sont les valeurs que prennent les coordonnées x et y, faisant entr'elles un angle droit, lorsqu'on les exprime par d'autres coordonnées mesurées sur des axes qui ont la même origine, mais d'ailleurs situés comme on voudra.

Si l'on eût changé à-la-fois l'origine et la direction des axes, l'x et l'y de chaque point se trouveraient augmentés de quantités constantes a et b; de sorte qu'on a plus généralement :

$$x = u\cos q + t\cos p + a$$
$$y = u\sin q + t\sin p + b,$$

où a et b sont, par rapport aux axes primitifs, les coordonnées de la nouvelle origine.

Si les axes des u et des t sont à angle droit, on a

$$p - q = 100°,$$

d'où $\sin p = \cos q$, $\cos p = -\sin q$,

et les formules trouvées plus haut deviennent :

$$x = u\cos q - t\sin q,$$
$$y = u\sin q + t\cos q,$$

ou en général

$$x = u\cos q - t\sin q + a,$$
$$y = u\sin q + t\cos q + b.$$

Si l'on veut renverser la question, et exprimer les coordonnées obliques u et t au moyen des coordonnées rectangulaires x et y, on multipliera la valeur de x par $\sin q$, celle de y par $\cos q$, et en retranchant la première de la seconde, on aura

$$t\sin(p-q) = y\cos q - x\sin q;$$

on multipliera ensuite l'expression de x par $\sin p$, celle de y par $\cos p$, et en retranchant la seconde de la première, on aura

$$u\sin(p-q) = x\sin p - y\cos p.$$

Si l'on avait en même temps changé l'origine, on aurait

$$t \sin (p-q) = (y+b)\cos q - (x+a)\sin q,$$

$$u \sin (p-q) = (x+a)\sin p - (y+b)\cos p.$$

Enfin, si au lieu des coordonnées rectilignes u et t, on voulait introduire la ligne AM que l'on nomme *rayon vecteur*, et l'angle qu'elle fait, pour chaque point, avec l'axe des x, on aurait, en nommant r le rayon vecteur AM, et φ l'angle PAM,

$$1 : \sin\varphi : \cos\varphi :: r : y : x,$$

et pour les coordonnées rectangulaires x et y,

$$y = r\sin\varphi, \qquad x = r\cos\varphi.$$

En substituant ces valeurs dans une équation entre x et y, on obtiendra la relation entre les coordonnées *polaires* r et φ, et réciproquement étant donnée une équation entre r et φ, on passera à une équation entre x et y, en mettant pour $\sin\varphi$, $\frac{y}{r}$ ou $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, et pour $\cos\varphi$, $\frac{x}{r}$ ou $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Faisons maintenant usage de ces formules pour réduire à ses formes les plus simples l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \quad (1),$$

et proposons-nous d'abord de trouver les conditions qui doivent être satisfaites pour que le rectangle des coordonnées disparaisse.

Pour y parvenir, on mettra au lieu de x et de y, leurs valeurs en u et t trouvées précédemment, ce qui donnera pour le coefficient de ut dans la transformée

$$2A\sin p\sin q + 2C\cos p\cos q + B\sin(p+q) \quad (M),$$

et il faudra pour que le terme affecté de ut puisse disparaître, que l'équation

$$M = 0$$

soit toujours possible.

Or si l'on divise tout par $\cos p \cos q$ (*), on a

$$2A \operatorname{tang} p \operatorname{tang} q + 2C + B(\operatorname{tang} p + \operatorname{tang} q) = 0 \quad (\alpha),$$

équation qui n'étant que du premier degré par rapport à chacune des indéterminées $\operatorname{tang} p$ et $\operatorname{tang} q$, donnera pour chacune d'elles une valeur réelle, dès qu'on en aura attribué une semblable à l'autre.

Il suit de là qu'il est toujours possible de prendre les angles p et q de manière que le terme affecté de ut manque dans l'équation des courbes du second degré; et comme nous venons de voir que quelle que soit la valeur réelle attribuée à l'une de ces indéterminées, à p par exemple, celle de q était toujours assignable, il s'ensuit qu'il existe une infinité d'axes par rapport auxquels l'équation des courbes du second degré sera dépourvue du rectangle des coordonnées.

Pour voir si parmi ces différens systèmes, il en est où les axes soient à angle droit, posons

$$p - q = 100^\circ,$$

on aura

$$\operatorname{tang} p = -\cot q,$$

et en substituant cette valeur dans l'équation (α), elle deviendra

$$2C - 2A \operatorname{tang} q \cot q + B(\operatorname{tang} q - \cot q) = 0,$$

ou

(*) On transforme ici les sinus et les cosinus en tangentes, parce que ces lignes n'étant comprises qu'entre les limites $+\infty$ et $-\infty$, il est toujours possible d'assigner la valeur d'un angle d'après celle de sa tangente, tandis qu'on ne peut pas toujours le faire d'après celles de son cosinus et de son sinus, qui ne varient qu'entre les limites $+1$ et -1.

$$\text{tang}\, q^2 + 2\frac{C-A}{B}\,\text{tang}\, q - 1 = 0 \qquad (6).$$

Cette équation de degré pair, ayant son dernier terme négatif, aura toujours ses deux racines réelles, et par conséquent il est toujours possible de faire disparaître le rectangle des coordonnées de l'équation générale, en rapportant à des axes rectangulaires les courbes qu'elle représente.

Mais comme l'équation (6) qui donne ici la valeur de tang q est du second degré, il semblerait qu'il existe deux systèmes d'axes rectangulaires pour chacun desquels cette circonstance a lieu. On se convaincra qu'il n'en existe qu'un seul, en observant que la condition $p - q = 100^\circ$ donne non-seulement $\text{tang}\, p = -\cot q$, mais encore $\text{tang}\, q = -\cot p$; car en substituant dans l'équation (α) cette valeur de tang q, on a une équation semblable à celle qu'on aurait trouvée, si on eût mis tang p pour tang q dans l'équation (6); d'où il suit que tang p et tang q sont les racines de cette équation.

Il est donc démontré que l'équation générale des courbes du second degré peut, sans rien perdre de sa généralité, être réduite à cette forme :

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0 \qquad (2).$$

Maintenant si l'on prend deux axes parallèles à ceux auxquels se rapporte cette équation, c'est-à-dire, si l'on met au lieu de x, $x + \alpha$, et au lieu de y, $y + \zeta$, on introduira deux nouvelles indéterminées α et ζ, à l'aide desquelles on pourra encore faire disparaître deux termes, et comme ces deux termes ne peuvent être les deux carrés, puisque les indéterminées n'entreront pas dans leurs coefficiens, il ne reste à distinguer que parmi les trois derniers termes les deux que cette transformation peut faire évanouir.

Supposons d'abord que ces termes soient ceux qui contiennent les premières puissances des variables, l'équation prendra cette forme,

$$a x^2 + b y^2 + E = 0,$$

où E désigne ce qu'est devenu e par la transformation, et sera telle qu'en y faisant nulle l'une des coordonnées on trouvera pour l'autre deux valeurs qui ne différeront que par le signe; en sorte que les deux axes jouiront de cette propriété que leurs parties comprises dans la courbe se coupent mutuellement en deux parties égales.

De plus, comme des deux axes que l'on considère ici, l'un est absolument arbitraire, puisque le passage de l'équation générale à l'équation dépourvue du rectangle des coordonnées, n'a déterminé que l'un des angles p et q, et que la dernière transformation ne change que l'origine sans changer la direction des axes, il est clair que la propriété qu'on vient de remarquer s'étend à toutes les droites menées par la nouvelle origine, et que par conséquent l'equation

$$a x^2 + b y^2 + E = 0,$$

suppose qu'il existe, dans le plan de la courbe, un point tel que toutes les cordes qui y passent s'y trouvent divisées en deux parties égales. Cette équation ne peut donc appartenir à toutes les courbes du second degré à-la-fois, mais seulement à celles pour lesquelles cette circonstance a lieu.

On a donné le nom de *centre* au point en question, et aux axes auxquels se rapporte l'équation

$$a x^2 + b y^2 + E = 0,$$

le nom de *diamètres conjugués*. Il est facile de voir que le centre est un point unique pour les courbes du second degré qui en sont pourvues. Soient en effet γ et δ les coordonnées

coordonnées d'un autre centre, s'il peut en exister, et transportons-y l'origine des coordonnées. L'équation

$$ax^2+by^2+E=0$$

deviendra

$$a(x+\gamma)^2+b(y+\delta)^2+E=0,$$

et il faudra, pour que la nouvelle origine soit un centre, que les deux valeurs de x qui répondront à $y=0$, soient données par une équation de la forme $x^2-A^2=0$, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que l'on aura $\gamma=0$. On démontrera de même qu'on doit avoir aussi $\delta=0$, et par conséquent, que la nouvelle origine, pour être un centre, ne doit pas différer de la première.

Nous avons déjà donné à l'équation générale la forme qu'elle doit affecter pour construire les courbes du second degré qui ont un centre; mais pour pouvoir les comprendre toutes dans une même équation, on fera disparaître le terme constant et l'un des deux autres termes, et l'équation (2) ramenée ainsi à la forme

$$ax^2+by^2+Cx=0,$$

se trouvera rapportée à deux axes qui se couperont en un point de la courbe; l'un, celui des x, passera par le centre et divisera en deux parties égales les ordonnées parallèles à l'autre; celui-ci sera tangent à la courbe au point où elle sera rencontrée par le premier.

Pour connaître dans quel cas cette dernière équation se rapporte aux courbes dépourvues de centre, on remarquera que $x=z-\frac{C}{2a}$ étant la transformation propre à faire disparaître le second terme par rapport à x, $\frac{C}{2a}$ est l'abscisse du centre, puisque c'est la quantité dont l'axe

des y doit se mouvoir parallèlement à lui-même pour passer par ce point. Or, lorsque la courbe n'a pas de centre, ou, ce qui revient au même, lorsque ce point est situé à une distance infinie de l'origine des coordonnées, son abscisse est infinie : on a donc dans ce cas particulier $a=0$, c'est-à-dire, que l'équation

$$ax^2 + by^2 + Cx = 0$$

ne convient aux courbes du second degré qui n'ont pas de centre, qu'autant qu'elle manque du terme affecté du carré de la variable dont elle contient la première puissance; l'équation de ces dernières est donc

$$by^2 + Cx = 0.$$

Si l'on remarque maintenant que l'on a pu passer de l'équation générale à l'équation dépourvue du rectangle des coordonnées d'une infinité de manières différentes, et que, quel que soit le système d'axes qui ait conduit à cette dernière, on peut toujours en tirer deux autres de cette forme,

$$mx^2 + ny^2 + p = 0,$$

pour les courbes qui ont un centre,

$$Ny^2 + Px = 0,$$

pour celles qui n'en ont pas; il sera facile d'en conclure d'abord, que pour toutes les courbes du second degré qui sont douées de centre, il existe une infinité de diamètres conjugués, dont deux seulement sont à angle droit, et pour chacun desquels l'équation est de la forme

$$mx^2 + ny^2 + p = 0;$$

et en second lieu, que pour les courbes du second degré

dépourvues de centre, il n'existe, dans une infinité de systèmes d'axes dont l'un est un diamètre et l'autre une tangente au sommet de ce diamètre, qu'un seul système où les coordonnées soient rectangulaires, mais que pour tous les systèmes, l'équation est de la forme

$$Ny^2 + Px = 0.$$

Ainsi les courbes du second degré se divisent naturellement en deux genres : le premier comprend celles de ces courbes qui ont un centre, le second se forme de celles qui en sont dépourvues ; nous allons suivre dans leur examen l'ordre que présente cette division, en commençant par discuter les courbes qui sont douées d'un centre.

Des Courbes du second degré qui ont un centre.

L'équation de ces courbes est

$$mx^2 + ny^2 + p = 0 ;$$

et comme elle ne peut rien exprimer, si les trois coefficiens restent positifs, il faut nécessairement y changer quelques signes. On supposera donc que les deux carrés étant positifs, le terme constant est négatif, ou que l'un des deux carrés et le terme constant sont à-la-fois négatifs ; et comme ces trois combinaisons épuisent toutes les transformations différentes que l'on peut faire, il n'y aura dans ce premier genre que les trois variétés représentées par les équations

$$mx^2 + ny^2 = p$$
$$mx^2 - ny^2 = p$$
$$ny^2 - mx^2 = p.$$

Nous allons les considérer successivement, en supposant

d'abord qu'elles se rapportent au système d'axes dans lequel les coordonnées sont rectangulaires.

De l'Ellipse.

La première de ces équations se rapporte à une courbe fermée à laquelle on a donné le nom d'*ellipse*. Il est d'abord facile de se convaincre que cette courbe ne s'étend pas à l'infini; car, pour que cette circonstance eût lieu, il faudrait qu'en substituant aux coordonnées rectangulaires x et y les coordonnées polaires r et φ, la supposition du rayon vecteur infini donnât une valeur réelle pour l'angle φ qu'il fait alors avec l'axe des x. Or, en mettant au lieu de x et de y, $r\cos\varphi$ et $r\sin\varphi$, on trouve

$$m\cos\varphi^2 + n\sin\varphi^2 = \frac{p}{r^2},$$

et lorsque $r = \infty$,

$$m\cos\varphi^2 + n\sin\varphi^2 = 0;$$

équation qui donne toujours pour φ une valeur imaginaire.

Si maintenant, pour déterminer les points où la courbe vient rencontrer chacun des axes, on fait successivement x et y égaux à zéro, on trouve pour les valeurs correspondantes de y et de x,

$$y = \pm\sqrt{\frac{p}{n}}, \qquad x = \pm\sqrt{\frac{p}{m}}.$$

Ainsi on aura déjà quatre points de la courbe, en portant sur l'axe des y, et à partir du centre la quantité $\sqrt{\frac{p}{n}}$, tant en dessus qu'en dessous de l'axe des x; et

sur ce dernier, et de chaque côté du centre la quantité $\sqrt{\frac{p}{m}}$. En résolvant ensuite l'équation

$$mx^2 + ny^2 = p,$$

par rapport à y, il vient

$$y = \pm\sqrt{\frac{p - mx^2}{n}}.$$

Or, si l'on remarque que ces valeurs de l'ordonnée ne peuvent être réelles que pour les valeurs de x qui sont plus petites que $\pm\sqrt{\frac{p}{m}}$, que de plus elles croissent successivement depuis o jusqu'à $\pm\sqrt{\frac{p}{n}}$ pendant que x passe par toutes les valeurs comprises entre $+\sqrt{\frac{p}{m}}$ et o, pour décroître ensuite et de la même manière, pendant que x augmente depuis o jusqu'à $-\sqrt{\frac{p}{m}}$, on verra facilement que la courbe est entièrement comprise dans le rectangle $ABCD$ (*fig.* 17), les points A et B étant ceux pour lesquels $x = \sqrt{\frac{p}{m}}$, et les points C et D ceux pour lesquels $y = \sqrt{\frac{p}{n}}$; en sorte qu'elle affecte la forme que représente cette figure.

Les quantités $\sqrt{\frac{p}{m}}$, $\sqrt{\frac{p}{n}}$ sont ce que l'on nomme les demi-axes de l'ellipse : en désignant la première par a et la seconde par b, on aura

$$m = \frac{p}{a^2}, \qquad n = \frac{p}{b^2},$$

et en mettant ces valeurs dans l'équation

$$mx^2 + ny^2 = p,$$

elle prendra cette forme symétrique,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Si au lieu de placer au centre l'origine des coordonnées, on voulait la placer à l'un des points où le grand axe vient rencontrer la courbe, il faudrait faire mouvoir l'axe des y parallèlement à lui-même de la quantité a, ou, ce qui est la même chose, mettre $x - a$ ou $a - x$ au lieu de x. On trouve alors pour l'équation de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2ab^2x = 0,$$

et sous l'une ou l'autre de ces formes,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \text{ ou } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2ab^2x = 0, \text{ ou } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

il est facile de reconnaître que *dans l'ellipse les carrés des ordonnées sont entr'eux comme les rectangles des abscisses correspondantes.*

Si l'on compare à l'équation $x^2 + y^2 = a^2$ de la circonférence de cercle l'équation $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ que nous venons de trouver pour l'ellipse, il est facile de voir qu'elles rentrent l'une dans l'autre lorsque $a = b$, et que, lors même que cette circonstance n'a pas lieu, elles conservent une grande analogie; il est donc naturel de chercher si les propriétés connues de la circonférence de cercle ont encore

lieu pour l'ellipse, ou comment elles se modifient en passant de l'une à l'autre courbe.

Or la propriété principale du cercle, celle qui comprend toutes les autres, c'est que la distance du centre à un point quelconque de la circonférence est une quantité constante, ou, en d'autres termes, peut s'exprimer rationnellement au moyen de l'abscisse de ce point; cherchons, d'après cela, s'il se trouve dans le plan de l'ellipse quelques points qui jouissent d'une propriété semblable.

Soient donc c et d les coordonnées d'un tel point et z sa distance à un point quelconque de la courbe dont les coordonnées sont x et y, on aura

$$z = \sqrt{(c-x)^2 + (d-y)^2},$$

ou, en substituant à y sa valeur prise dans l'équation de la courbe,

$$z = \sqrt{(c-x)^2 + \left(d - \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}.$$

Or il est clair qu'une telle expression ne peut être rationnelle en x, qu'autant qu'on aura d'abord

$$d = 0,$$

et ensuite

$$c^2 - 2cx + x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

ou

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2 - 2cx + b^2 + c^2,$$

égal à un carré parfait, ce qui exige que l'on ait

$$c^2 = \frac{(a^2-b^2)(b^2+c^2)}{a^2},$$

ou

$$0 = a^2 - b^2 - c^2;$$

et par conséquent

$$c = \pm\sqrt{a^2-b^2}$$

Il suit de là que si a est plus grand que b, c'est-à-dire, si l'ellipse est alongée dans le sens des x, il y aura, sur le grand axe et à une distance du centre $= \sqrt{a^2 - b^2}$, deux points tels que nous les cherchons, et qu'on les construira facilement en coupant l'axe des x par un arc de cercle décrit du sommet du petit axe comme centre et avec un rayon égal à la moitié du grand.

Si l'on substitue successivement dans l'expression de z, chacune des valeurs trouvées pour c, on aura, en nommant z' et z'' les valeurs correspondantes de z,

$$z' = a + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} x,$$

$$z'' = a - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} x;$$

et dans le cas où ces deux lignes seraient menées à un même point de la courbe, x étant égal de part et d'autre, on trouvera, en les ajoutant,

$$z' + z'' = 2a,$$

c'est-à-dire que *la somme des lignes z' et z'' qu'on nomme rayons vecteurs, menées des points fixes que nous venons de déterminer sur le grand axe, et qu'on appelle* foyers, *à un point quelconque de la courbe, est toujours égale au grand axe.*

Il sera facile à l'aide de cette propriété, de décrire l'ellipse par points en cette manière : de l'un des foyers, et avec une distance plus petite que le grand axe, ayant décrit un arc, on le coupera par un second arc décrit de l'autre foyer et avec un rayon égal à la portion restante du grand axe; tous les points d'intersection obtenus de cette manière appartiendront à l'ellipse.

On peut encore la décrire par le mouvement continu d'un piquet qui tend un cordeau égal au grand axe, et dont les extrémités sont fixées aux foyers, puisque de cette manière, la somme des deux distances du piquet aux deux foyers est par-tout égale au grand axe ; mais il sera très-commode dans la pratique d'employer le procédé suivant :

Soient AB et CD (*fig.* 18), les deux axes de l'ellipse que l'on veut construire, et AG leur demi-différence ; on rapportera sur un papier les trois points A, G et O, et en les disposant de manière que les points A et G s'appliquent sur les côtés de l'un des quatre angles droits formés autour du centre, on marquera chacune des positions du point O, qui seront autant de points de l'ellipse cherchée.

Ainsi, ayant placé, par exemple, les points A et G dans les positions E et F, et les faisant mouvoir ensuite de manière qu'ils s'appliquent constamment sur les côtés OD et OB de l'angle BOD, on construira tous les points M du quart d'ellipse CMB ; et en répétant la même chose pour les trois autres angles, on décrira successivement chacun des trois autres quarts.

Il est facile de se convaincre que les points ainsi trouvés, appartiennent à l'ellipse dont AB et CD sont les axes. En effet, on a dans le triangle rectangle FPM,

$$\overline{PM}^2 = \overline{FM}^2 - \overline{FP}^2,$$

ou, en désignant par x et y les coordonnées OP et PM et par a et b les demi-axes,

$$y^2 = b^2 - (x - OF)^2.$$

Or les triangles semblables OFE, FPM, donnent

$$OF : FE :: FP : FM,$$

ou

$$OF : a - b :: x - OF : b,$$

d'où l'on tire $OF = \frac{(a-b)}{a} x$,

on aura donc

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

pour l'équation qui lie les coordonnées x et y de chaque point M obtenu par ce procédé, et c'est aussi, comme on vient de le voir, celle qui a lieu entre les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse construite sur les axes $2a$ et $2b$.

Pour trouver l'ordonnée qui répond au foyer, on fera

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

dans l'équation de la courbe

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

ce qui donnera

$$y = \frac{b^2}{a}.$$

Ainsi cette ordonnée est une troisième proportionnelle au grand axe et au petit axe. Le double de cette ordonnée $\frac{2b^2}{a}$ est ce qu'on nomme le *paramètre*; en le désignant par p, on aura

$$\frac{p}{2a} = \frac{b^2}{a^2},$$

et en substituant cette valeur dans l'équation

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

il vient

$$y^2 = \frac{p}{2a}(a^2 - x^2),$$

c'est l'équation au paramètre.

Enfin, comme nous venons de voir que le rayon vecteur peut toujours être exprimé rationnellement en x, on peut se proposer de substituer aux coordonnées rectangulaires x et y le rayon vecteur et l'angle qu'il fait pour chaque point de la courbe avec le grand axe. C'est ce qui va nous conduire à l'*équation polaire* de l'ellipse.

Pour l'obtenir, nous remarquerons qu'en continuant de désigner par x et y les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, par z le rayon vecteur, par φ l'angle qu'il fait dans chacune de ces positions avec l'axe des x, et par c l'abscisse du foyer, on a

$$1 : \sin\varphi : \cos\varphi :: z : y : x + c,$$

et par conséquent

$$y = z\sin\varphi,$$
$$x = z\cos\varphi - c;$$

en substituant ces valeurs dans l'équation de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

on trouve

$$a^2z^2\sin\varphi^2 + b^2z^2\cos\varphi^2 - 2b^2cz\cos\varphi + b^2c^2 = a^2b^2,$$

ou, en mettant pour $\sin\varphi^2$ sa valeur $1 - \cos\varphi^2$,

$$a^2z^2 - (a^2 - b^2)z^2\cos\varphi^2 - 2b^2cz\cos\varphi = b^2(a^2 - c^2),$$

ou enfin à cause de $a^2 - b^2 = c^2$,

$$a^2z^2 - c^2z^2\cos\varphi^2 - 2b^2cz\cos\varphi = b^4;$$

on tire de cette dernière équation

$$a^2z^2 = (b^2 + cz\cos\varphi)^2,$$

et par conséquent, pour l'équation cherchée,

$$\pm az = b^2 + cz\cos\varphi,$$

ou

$$z = \frac{b^2}{\pm a - c\cos\varphi}.$$

Cette équation fournira pour chaque valeur de φ deux valeurs de z inégales et de signe contraire : par exemple, si $\varphi = 0$, il vient

$$z = +\frac{b^2}{a-c} = +\frac{b^2(a+c)}{a^2-c^2} = +(a+c)$$

et

$$z = -\frac{b^2}{a+c} = -\frac{b^2(a-c)}{a^2-c^2} = -(a-c),$$

valeurs qui répondent aux deux points où la courbe vient rencontrer l'axe des x.

Nous venons de trouver les propriétés de l'ellipse par rapport à ses axes principaux, proposons-nous maintenant d'exprimer, au moyen de ces axes, deux diamètres conjugués quelconques.

Pour y parvenir, on mettra au lieu de x et de y dans l'équation :

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

les valeurs

$$u\cos q + t\cos p, \qquad u\sin q + t\sin p,$$

qui servent à passer d'un système de coordonnées orthogonales à un système de coordonnées obliques, et l'on en conclura cette transformée :

$$\left.\begin{matrix} a^2\sin q^2 \\ +b^2\cos q^2 \end{matrix}\right\} u^2 + \left.\begin{matrix} a^2\sin p^2 \\ +b^2\cos p^2 \end{matrix}\right\} t^2 + \left.\begin{matrix} 2a^2\sin p\sin q \\ +2b^2\cos p\cos q \end{matrix}\right\} ut = a^2b^2$$

qui est l'équation de l'ellipse par rapport à deux diamètres quelconques.

Ces diamètres seront conjugués, si l'on fait disparaître le terme affecté de ut; on posera donc, pour satisfaire à cette condition :

$$a^2 \sin p \sin q + b^2 \cos p \cos q = 0, \qquad (N)$$

et l'on aura pour l'équation de l'ellipse rapportée à deux diamètres conjugués quelconques

$$\left.\begin{matrix} a^2 \sin q^2 \\ + b^2 \cos q^2 \end{matrix}\right\} u^2 + \left.\begin{matrix} a^2 \sin p^2 \\ + b^2 \cos p^2 \end{matrix}\right\} t^2 = a^2 b^2.$$

Pour connaître les grandeurs des demi-diamètres conjugués, on fera successivement $u = 0$, et $t = 0$, ce qui donnera, en les désignant par a' et b',

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin q^2 + b^2 \cos q^2}, \quad b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin p^2 + b^2 \cos p^2};$$

et par conséquent :

$$a^2 \sin q^2 + b^2 \cos q^2 = \frac{a^2 b^2}{a'^2}, \; a^2 \sin p^2 + b^2 \cos p^2 = \frac{a^2 b^2}{b'^2};$$

si l'on introduit ensuite ces valeurs dans la dernière équation, elle se changera en cette autre

$$a'^2 t^2 + b'^2 u^2 = a'^2 b'^2,$$

et comme elle est précisément de même forme que celle qui est relative aux axes, il en résulte que la propriété trouvée précédemment peut maintenant être énoncée de cette manière plus générale :

Quel que soit l'angle des coordonnées, les carrés des ordonnées à l'ellipse sont proportionnels aux rectangles des abscisses correspondantes.

L'équation aux axes et l'équation aux diamètres con-

jugués rapprochées l'une de l'autre, nous conduiront facilement aux relations qui lient les deux systèmes.

En effet, si, dans la dernière, on substitue aux coordonnées u et t les valeurs

$$\frac{x \sin p - y \cos p}{\sin (p-q)}, \quad \frac{y \cos q - x \sin q}{\sin (p-q)}$$

qui servent à revenir d'un système de coordonnées obliques à un système de coordonnées rectangulaires, la transformée sera l'équation de l'ellipse par rapport à deux diamètres rectangulaires quelconques et, en faisant nul le coefficient de xy, l'équation résultante

$$\left.\begin{matrix} a'^2 \cos q^2 \\ + b'^2 \cos p^2 \end{matrix}\right\} y^2 + \left.\begin{matrix} a'^2 \sin q^2 \\ + b'^2 \sin p^2 \end{matrix}\right\} x^2 = a'^2 b'^2 \sin (p-q)^2$$

sera relative à deux diamètres conjugués rectangulaires et devra par conséquent être identiquement la même que l'équation

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

trouvée pour les axes.

En vertu de cette identité, on pourra donc égaler de part et d'autre les coefficiens des termes semblables, ce qui donnera les trois équations

$$a^2 = a'^2 \cos q^2 + b'^2 \cos p^2$$
$$b^2 = a'^2 \sin q^2 + b'^2 \sin p^2$$
$$ab = a'b' \sin (p-q).$$

Il suit d'abord de la troisième, que *le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques, équivaut au rectangle des axes*, et par conséquent que *l'aire d'un parallélogramme quelconque circonscrit à l'ellipse est une quantité constante.*

Si l'on ajoute ensuite les deux premières, on arrivera à cette autre

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$

de laquelle il résulte que *la somme des carrés de deux diamètres conjugués est égale à celle des carrés des axes*, et par conséquent que *la somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est une quantité constante.*

Il est facile de vérifier que la troisième des quatre équations que l'on vient de trouver est le produit des deux premières, comme la quatrième est leur somme : deux seulement de ces quatre équations seront donc nécessaires; et si, à cause de leur symétrie, on considère les deux dernières et qu'on leur joigne l'équation de condition (*N*), et les valeurs précédemment trouvées pour a'^2 et b'^2, on aura, dans les cinq équations,

$$a\,b = a'\,b' \sin(p-q),\quad a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$
$$a^2 \sin p \sin q + b^2 \cos p \cos q = 0 \ldots\ldots\ldots (N),$$
$$a'^2 = \frac{a^2\,b^2}{a^2 \sin q^2 + b^2 \cos q^2},\quad b'^2 = \frac{a^2\,b^2}{a^2 \sin p^2 + b^2 \cos p^2},$$

la solution de tous les problèmes qu'on peut se proposer sur les axes et les diamètres conjugués.

Par exemple, les deux premières serviront à faire connaître les demi-axes a et b, lorsqu'on ne connaîtra que deux demi-diamètres conjugués a', b' et l'angle $p-q$ que forment leurs directions; pour y parvenir, on multipliera par 2 la première des deux équations, et en l'ajoutant et la retranchant successivement de la seconde, et extrayant ensuite la racine carrée, on aura deux équations,

$$a + b = \sqrt{a'^2 + b'^2 + 2\,a'\,b' \sin(p-q)}$$
$$a - b = \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2\,a'\,b' \sin(p-q)},$$

qui, par les propriétés connues des triangles obtusangles et acutangles, donneront la somme $a+b$ et la différence $a-b$ des deux demi-axes, et par suite ces demi-axes eux-mêmes; connaissant ainsi la grandeur des axes, on arrivera facilement aux angles p et q qu'ils font avec les diamètres conjugués, en se servant des expressions de a'^2 et de b'^2.

L'équation (N) servira à déterminer un diamètre, lorqu'on connaîtra son conjugué; on le construira d'ailleurs immédiatement en menant une parallèle à la tangente au sommet du diamètre connu.

Enfin, si l'on égale les valeurs de a'^2 et b'^2, on aura l'équation

$$a^2 \sin p^2 + b^2 \cos p^2 = a^2 \sin q^2 + b^2 \cos q^2,$$

qui jointe à l'équation (N) servira à déterminer la position des diamètres conjugués égaux.

On tire de la première de ces deux équations en y transformant les cosinus en sinus,

$$(a^2 - b^2) \sin q^2 = (a^2 - b^2) \sin p^2,$$

et par conséquent

$$\sin q = \pm \sin p.$$

Mettant ensuite dans la seconde, $-\sin p$ au lieu de $\sin q$, et $\cos p$ au lieu de $\cos q$, il vient

$$-a^2 \sin q^2 + b^2 \cos p^2 = 0,$$

d'où $$\operatorname{tang} q = \operatorname{tang} p = \pm \frac{b}{a},$$

ou plutôt $$\operatorname{tang} p = + \frac{b}{a}$$

et $$\operatorname{tang} q = - \frac{b}{a},$$

puisque

puisque le produit de ces deux tangentes doit être égal à $-\frac{b^2}{a^2}$. Or $-\frac{b}{a}$, $+\frac{b}{a}$, sont aussi les tangentes des angles que font, avec l'axe des x, les lignes qui joignent les extrémités des axes : *on construira donc les diamètres conjugués égaux en menant par le centre des parallèles à ces cordes.*

Dans ce cas particulier, l'équation de l'ellipse deviendra

$$x^2 + y^2 = a'^2 \text{ ou } x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{2};$$

et il faudra, pour ne pas la confondre avec celle du cercle qui aurait son centre à l'origine des coordonnées et pour rayon $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, se rappeler que les coordonnées, au lieu d'être rectangulaires, font entr'elles un angle $p - q$, qui a pour tangente $\frac{2ab}{a^2 + b^2}$.

De l'Hyperbole.

Considérons maintenant la seconde variété de ce premier genre, celle que construit l'équation

$$mx^2 - ny^2 = p.$$

Cette courbe a des points situés à l'infini ; car en mettant au lieu de x, $r \cos \varphi$ et aulieu de y, $r \sin \varphi$, on trouve

$$mr^2 \cos \varphi^2 - nr^2 \sin \varphi^2 = p,$$

ou
$$m \cos \varphi^2 - n \sin \varphi^2 = \frac{p}{r^2},$$

d'où l'on tire, pour déterminer l'angle φ, lorsque $r = \infty$,

l'équation

$$m\cos\varphi^2 - n\sin\varphi^2 = 0,$$

ou

$$\tang\varphi = \pm\sqrt{\frac{m}{n}},$$

qui, donnant pour cet angle deux valeurs toujours réelles et de signe contraire, indique que la courbe s'étend à l'infini dans le sens des x positifs et dans le sens des x négatifs.

Pour voir plus particulièrement sa forme, on cherchera d'abord les points où elle rencontre les axes. Or, en égalant successivement à zéro chacune des coordonnées, on trouve:

$$y = \pm\sqrt{-\frac{p}{n}}, \qquad x = \pm\sqrt{\frac{p}{m}},$$

d'où il suit que la courbe ne rencontre pas l'axe des y, mais qu'on aura deux points de sa direction, en portant sur l'axe de x et de chaque côté du centre une quantité $= \sqrt{\frac{p}{m}}$. En résolvant ensuite l'équation

$$mx^2 - ny^2 = p$$

par rapport à y, ce qui donne

$$y = \pm\sqrt{\frac{mx^2 - p}{n}},$$

on voit facilement que les valeurs de y ne peuvent être réelles qu'autant que l'on a

$$mx^2 > p, \qquad \text{ou } x > \pm\sqrt{\frac{p}{m}},$$

c'est-à-dire, qu'autant que les valeurs positives ou négatives

que l'on attribuera à x, seront plus grandes que celles qui correspondent à $y = 0$; en sorte que si par les points où la courbe vient couper l'axe des x, on conçoit des perpendiculaires à cet axe, aucun point de la courbe ne tombera dans l'espace intérieur que déterminent ces perpendiculaires, mais qu'au-delà, c'est-à-dire pour les valeurs de x plus grandes que $\sqrt{\frac{p}{m}}$, les ordonnées croîtront de plus en plus jusqu'à devenir infinies, quel que soit le signe de x. Il suit évidemment de là que la courbe est formée de deux branches séparées de la quantité $2\sqrt{\frac{p}{m}}$, qui toutes deux s'étendent à l'infini, mais dans des sens différens, et qui d'ailleurs sont parfaitement égales et semblables : c'est la propriété principale de cette courbe à laquelle on a donné le nom d'*Hyperbole*.

En représentant par a le demi-axe réel $\sqrt{\frac{p}{m}}$, et par $b\sqrt{-1}$ le demi-axe imaginaire $\sqrt{-\frac{p}{n}}$, on aura

$$m = \frac{p}{a^2}, \quad n = \frac{p}{b^2},$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation

$$mx^2 - ny^2 = p,$$

elle deviendra

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

et ne différera que par le signe de b^2 de celle que nous avons trouvée plus haut pour l'ellipse.

Si $a = b$, cette équation se réduit à

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

et ne diffère que par le signe de y^2 de celle du cercle dont le centre est à l'origine des coordonnées. On a donné à l'espèce d'hyperbole qu'elle construit alors, le nom d'hyperbole *équilatère*. Placée dans la série des hyperboles, comme le cercle l'est dans celle des ellipses, elle a avec cette courbe une grande analogie ; sans entrer en détail à cet égard, nous allons observer quelques points de rapprochement.

Si d'abord, on cherche l'expression de la tangente de l'angle que forme, avec l'axe des x, la droite menée du sommet négatif de l'hyperbole au point qui a pour abscisse x', on aura $\frac{\sqrt{x'^2-a^2}}{x'+a}$ ou plus simplement $\sqrt{\frac{x'-a}{x'+a}}$; en changeant x' en x'', il viendra $\sqrt{\frac{x''-a}{x''+a}}$ pour la tangente de l'angle que fait avec les abscisses la droite menée du même sommet au point de l'hyperbole dont l'abscisse est x'', et il sera facile de conclure des deux expressions, que la tangente de l'angle que font entr'elles ces deux droites a pour valeur

$$\frac{\sqrt{(x'-a)(x''+a)}-\sqrt{(x'+a)(x''-a)}}{\sqrt{(x'-a)(x''-a)}+\sqrt{x'+a)(x''+a)}}.$$

Le signe de a changé, dans cette quantité, donne la tangente de l'angle que forment entr'elles les deux droites menées aux mêmes points de l'hyperbole et par le sommet opposé; et comme, au signe près, les deux résultats sont les mêmes, on en doit conclure que *dans l'hyperbole équilatère, comme dans le cercle, deux angles sont égaux lorsqu'ayant leur sommet aux extrémités de l'axe, ils sont appuyés sur le même arc de la courbe.*

Si ensuite on multiplie l'une par l'autre les deux expres-

sions $\sqrt{\frac{x'-a}{x'+a}}$, $\sqrt{\frac{x'+a}{x'-a}}$ qui désignent les tangentes des angles que font respectivement avec les x, les droites menées des deux extrémités de l'axe au point de l'hyperbole dont l'abscisse est x', on trouve l'unité pour produit de ces deux tangentes; ainsi ces angles sont complémens l'un de l'autre et *dans l'hyperbole équilatère, aussi bien que dans le cercle, les deux droites menées d'un point quelconque de la courbe aux extrémités de l'axe, font avec ce même axe deux angles qui sont complémens l'un de l'autre.*

Enfin la propriété dont jouit le cercle d'avoir tous ses rayons égaux, trouve aussi dans l'hyperbole équilatère une propriété qui quoique différente lui correspond. En effet, son équation donnant $x = \sqrt{a^2+y^2}$ indique que *dans l'hyperbole équilatère tout point du second axe est également éloigné du sommet de la courbe et du point de cette courbe qui lui répond perpendiculairement.*

De là un moyen simple de trouver successivement tous les points de la courbe. Par tous ceux du second axe, on mènera des parallèles au premier, et en rapportant sur chacune de ces parallèles la distance du point par lequel elle est menée au sommet donné de l'hyperbole équilatère, on aura un point de chacune des branches opposées.

De là encore un moyen de construire les racines de l'équation du second degré

$$x^2 \pm px - q = 0;$$

en effet, puisqu'on en tire

$$q = x^2 \pm px,$$

il est visible que les valeurs de x sont les abscisses, cor-

respondant à une même ordonnée $\sqrt{q}$, de deux points d'une hyperbole équilatère construite sur un axe $= p$; on prendra donc (*fig.* 19.) $CB = CA = \frac{p}{2}$, $CD = \sqrt{q}$, $DM = DM' = DB$, et on abaissera les ordonnées MP et $M'P'$; BP et BP' seront les valeurs de x.

Sans pousser plus loin ce rapprochement entre le cercle et l'hyperbole équilatère, rapprochement qu'on pourrait aussi établir entre l'ellipse et l'hyperbole non équilatère, en leur donnant des axes communs comme on l'a fait pour les deux premières courbes, revenons à la discussion de l'hyperbole en général et proposons-nous d'abord de transporter l'origine du centre où nous l'avons supposée jusqu'ici, à l'un des points où la courbe vient rencontrer l'axe des x. On y parviendra en remplaçant x dans l'équation

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

par $x - a$ ou par $x + a$,

suivant que l'on considérera le sommet qui est à droite du centre ou celui qui est à gauche, et l'équation de l'hyperbole prendra alors l'une ou l'autre de ces formes

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2ax), \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax).$$

En faisant ensuite les mêmes calculs que pour l'ellipse, on trouvera que l'hyperbole a aussi deux foyers, que tous deux ils sont placés sur l'axe des x au-delà des deux sommets et à la distance $\sqrt{a^2 + b^2}$ du centre, que leurs distances à un point quelconque de la courbe dont les coordonnées sont x et y ont respectivement pour expression

$$\frac{x\sqrt{a^2 + b^2}}{a} + a \quad \text{et} \quad \frac{x\sqrt{a^2 + b^2}}{a} - a,$$

et, par conséquent, que si l'on représente par z' et z'' ces distances, on aura en retranchant la seconde de la première,

$$z' - z'' = 2a;$$

d'où l'on voit que *pour tous les points de l'hyperbole, la différence des rayons vecteurs est égale à l'axe principal.*

Cette propriété des foyers peut servir à construire l'hyperbole par points. Pour cela de l'un des foyers comme centre, et d'un rayon quelconque, on décrira un arc de cercle que l'on coupera par un autre arc décrit du second foyer, et avec un rayon différent du premier d'une quantité égale au premier axe. Les points d'intersection appartiendront à l'hyperbole, puisque pour chacun d'eux la différence des rayons vecteurs sera égale au grand axe.

Si, pour connaître l'ordonnée qui passe par le foyer, on fait $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ dans l'équation

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

on trouve

$$y = \frac{b^2}{a},$$

et par conséquent pour le double de cette ordonnée, ou pour le paramètre $\frac{2b^2}{a}$; ainsi le paramètre est ici, comme pour l'ellipse, une troisième proportionnelle aux deux axes.

En posant ensuite

$$y = z \sin \varphi$$
$$x = c + z \cos \varphi,$$

mettant ces valeurs dans l'équation de l'hyperbole, et effectuant les réductions qui s'ensuivent, on aura pour l'équation polaire de cette courbe

$$z = \frac{b^2}{c\cos\varphi \mp a}.$$

Chaque valeur donnée à φ dans cette équation conduira à deux valeurs différentes de z ; par exemple, si l'on fait $\varphi = 0$, on aura

$$z = \frac{b^2}{c - a} = \frac{b^2(c + a)}{c^2 - a^2} = c + a,$$

et $$z = \frac{b^2}{c + a} = \frac{b^2(c - a)}{c^2 - a^2} = c - a,$$

valeurs qui appartiennent aux deux sommets de l'hyperbole.

Enfin, si dans l'équation

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

relative aux axes, on met au lieu de x et de y les valeurs

$$u\cos q + t\cos p, \qquad u\sin q + t\sin p,$$

on obtiendra la transformée suivante,

$$\left.\begin{matrix} b^2\cos q^2 \\ -a^2\sin q^2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} u^2 + b^2\cos p^2 \\ -a^2\sin p^2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} t^2 + 2b^2\cos p\cos q \\ -2a^2\sin p\sin q \end{matrix}\right\} ut = a^2b^2,$$

qui appartient à deux diamètres quelconques.

Ces diamètres seront conjugués, si l'on a

$$b^2\cos p\cos q - a^2\sin p\sin q = 0$$

et l'équation se réduira alors à

$$\left.\begin{matrix} b^2\cos q^2 \\ -a^2\sin q^2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} u^2 + b^2\cos p^2 \\ -a^2\sin p^2 \end{matrix}\right\} t^2 = a^2b^2$$

dans laquelle

$$\frac{a^2\,b^2}{b^2\cos q^2 - a^2\sin q^2} \text{ et } \frac{a^2\,b^2}{b^2\cos p^2 - a^2\sin p^2},$$

qui sont les valeurs de u et de t correspondant à $t=0$ et à $u=0$, représentent les carrés des demi-diamètres conjugués.

Il est à remarquer que ces deux valeurs ne sauraient être à-la-fois de même signe. Supposons en effet que la première soit positive, il faudra que l'on ait

$$b^2\cos q^2 > a^2\sin q^2,$$

ou
$$\text{tang } q < \frac{b}{a};$$

mais l'équation

$$b^2\cos p\cos q - a^2\sin p\sin q = 0$$

donne

$$\text{tang } q = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{\text{tang } p},$$

on devrait donc avoir aussi

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{\text{tang } p} < \frac{b}{a}, \quad \text{ou} \quad \text{tang } p > \frac{b}{a},$$

et par conséquent

$$a^2\sin p^2 > b^2\cos p^2,$$

supposition qui rend négative la seconde des deux valeurs.

Ainsi la courbe ne sera jamais rencontrée que par l'un des diamètres conjugués, et en désignant le premier par $2a'$, il faudra désigner le second par $2b'\sqrt{-1}$, ce qui donnera

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos q^2 - a^2 \sin q^2}, \quad -b'^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos p^2 - a^2 \sin p^2}$$

par suite

$$b^2 \cos q^2 - a^2 \sin q^2 = \frac{a'^2}{a^2 b^2}, \; b^2 \cos p^2 - a^2 \sin p^2 = -\frac{b'^2}{a^2 b^2},$$

et pour l'équation de l'hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués quelconques

$$b'^2 u^2 - a'^2 t^2 = a'^2 b'^2.$$

On tire de cette équation

$$t^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(u^2 - a'^2),$$

et par conséquent *quel que soit l'angle des coordonnées, les carrés des ordonnées à l'hyperbole sont proportionnels aux rectangles des abscisses correspondantes.*

En opérant sur cette dernière équation, comme sur l'équation analogue de l'ellipse, c'est-à-dire, en substituant à u et à t les valeurs qui servent à revenir d'un système de coordonnées obliques à un système de coordonnées rectangulaires, on aura en x et y une transformée qui, lorsqu'on aura fait nul le coefficient de xy, devra être identiquement la même que l'équation trouvée pour les axes et conduira par conséquent aux trois équations :

$$-a^2 = b'^2 \cos p^2 - a'^2 \cos q^2$$
$$b^2 = b'^2 \sin p^2 - a'^2 \sin q^2$$
$$ab = a'b' \sin(p-q),$$

et par suite à cette autre

$$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2,$$

que l'on déduira de l'addition des deux premières.

Il suit de la troisième que *le parallélogramme de deux diamètres conjugués quelconques est équivalent au rectangle des axes*, et par conséquent que *l'aire d'un parallélogramme quelconque inscrit entre les deux branches de l'hyperbole est une quantité constante.*

La quatrième apprend ensuite que *dans l'hyperbole, la différence des carrés de deux diamètres conjugués équivaut à la différence des carrés des axes*, et par conséquent que *la différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est une quantité constante.*

Ces propriétés sont analogues à celles que nous avons trouvées plus haut pour l'ellipse ; on résoudra aussi, comme on l'a fait pour cette dernière courbe et d'une manière analogue, les différentes questions que l'on pourra se proposer sur les axes et les diamètres conjugués quelconques ; mais, en considérant l'hyperbole par rapport à ses diamètres égaux, on obtiendra des propriétés remarquables par leur singularité et dont la recherche mérite de nous occuper.

Il est d'abord clair, d'après l'équation

$$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2,$$

qui, pour $a' = b'$, donne $a = b$ et réciproquement, que parmi toutes les hyperboles, l'hyperbole équilatère a seule des diamètres conjugués égaux, et que tous les siens le sont deux à deux.

En traitant d'une hyperbole quelconque, on ne pourra donc chercher ses diamètres égaux que parmi ses diamètres non conjugués, et il faudra par conséquent partir de l'équation générale,

$$\left.\begin{matrix} b^2\cos q^2 \\ -a^2\sin q^2 \end{matrix}\right\} u^2 + \left.\begin{matrix} b^2\cos p^2 \\ -a^2\sin p^2 \end{matrix}\right\} t^2 + \left.\begin{matrix} 2b^2\cos p\cos q \\ -2a^2\sin p\sin q \end{matrix}\right\} ut = a^2b^2,$$

qui, par l'égalité à zéro de chacune des coordonnées successivement, donnera d'abord, pour les longueurs des demi-diamètres,

$$\frac{ab}{\sqrt{b^2\cos q^2 - a^2\sin q^2}} \quad \text{et} \quad \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos p^2 - a^2\sin p^2}},$$

expressions dans lesquelles on suppose que $b\cos q$ et $b\cos p$ ne sont pas moindres que $a\sin q$ et $a\sin p$ sans quoi les diamètres ne rencontreraient pas la courbe.

Maintenant, pour que les diamètres soient égaux, il faut qu'on ait

$$b^2\cos q^2 - a^2\sin q^2 = b^2\cos p^2 - a^2\sin p^2,$$

ou $$(b^2+a^2)\cos q^2 - a^2 = (b^2+a^2)\cos p^2 - a^2,$$

c'est-à-dire $$\cos q = \pm\cos p,$$

et par conséquent $$\sin q = \pm\sin p,$$

deux équations de condition auxquelles on doit encore joindre les inégalités

$$b^2\cos q^2 > a^2\sin q^2 \quad \text{ou} \quad \text{tang}\, q < \pm\frac{b}{a}$$

et $$b^2\cos p^2 > a^2\sin p^2 \quad \text{ou} \quad \text{tang}\, p < \pm\frac{b}{a}.$$

Ces différens résultats n'établissent qu'une relation entre les angles p et q sans les déterminer précisément, et nous conduisent seulement à cette conclusion : *deux diamètres d'une hyperbole sont égaux lorsque l'angle qu'ils comprennent est divisé par l'axe en deux parties égales, et que la tangente de sa moitié ne surpasse pas le rapport du second axe au premier.*

Mais si, passant à la limite vers laquelle tendent les

angles p et q, on écrit, au lieu des inégalités

$$\text{tang } q < \pm\frac{b}{a}, \quad \text{tang } p < \pm\frac{b}{a},$$

les équations

$$\text{tang } q = \pm\frac{b}{a}, \quad \text{tang } p = \pm\frac{b}{a},$$

en observant de faire correspondre les expressions de signe contraire, les angles p et q seront complètement déterminés; les valeurs des diamètres restant encore réelles prendront seulement la forme $\frac{1}{0}$, et nous fourniront par conséquent ce théorême :

Les lignes qui, menées par le centre de l'hyperbole, font avec l'axe des x des angles égaux et ayant pour tangente le rapport du second axe au premier, s'approchent continuellement de la courbe, sans pouvoir la rencontrer qu'à l'infini.

Ces droites, qui ne peuvent parvenir à toucher la courbe, quelque prolongées qu'on les suppose l'une et l'autre et qui limitent ainsi son cours, ont été nommées *asymptotes*. Il est clair, d'après les équations

$$\text{tang } p = \frac{b}{a}, \quad \text{tang } q = -\frac{b}{a},$$

qu'on les construira, soit en faisant passer par le centre une droite qui rencontre la tangente au sommet de la courbe à une distance au-dessus de l'axe des x égale au demi-second axe, soit en menant par le même point des parallèles aux droites qui joignent les extrémités des deux axes; et puisqu'on a trouvé plus haut que les tangentes des angles que font avec les abscisses les diamètres égaux de l'ellipse qui a pour axes $2a$ et $2b$, sont aussi $+\frac{b}{a}$ et

$-\frac{b}{a}$, on voit que si une ellipse et une hyperbole sont construites sur les mêmes axes, les diamètres égaux de l'ellipse prolongés, seront les asymptotes de l'hyperbole.

Pour l'hyperbole équilatère, on a

$$\frac{b}{a}=1;$$

ainsi, dans ce cas particulier, les deux asymptotes sont à angle droit, et chacune d'elles fait avec l'axe des x un angle de 50°.

Lorque les deux asymptotes comprennent un angle égal au tiers de quatre angles droits, chacune d'elles forme avec l'axe des x un angle égal au tiers de deux angles droits et dont la tangente a parconséquent pour valeur $\sqrt{3}$, on a donc alors

$$\frac{b}{a}=\sqrt{3} \text{ ou } b=a\sqrt{3},$$

et l'équation de la courbe $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ devient,

$$3x^2-y^2=3a^2.$$

La même valeur $a\sqrt{3}$ mise au lieu de b dans l'expression $\sqrt{a^2+b^2}$, la réduit à $2a$; ainsi le sommet de la courbe est placé à égale distance du centre et du foyer, et la perpendiculaire élevée, dans le sens des x positifs, sur le milieu du demi-axe, l'est aussi sur le milieu de la distance du foyer positif au sommet négatif.

D'autre part, à cause de $\sqrt{a^2+b^2}=2a$, l'expression $\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a}-a$ qui mesure la distance du foyer positif à chaque point de la branche de courbe qui lui répond, devient $2x-a$ ou $2\left(x-\frac{1}{2}a\right)$; la distance du même

point à la perpendiculaire en question est seulement $x - \frac{1}{2}a$; donc, en nommant *directrice* cette perpendiculaire, on pourra énoncer ainsi ce résultat : pour l'hyperbole dont les asymptotes font entr'elles un angle égal au tiers de quatre angles droits, la distance de chaque point au foyer est double de sa distance à la directrice.

Donc, si la distance du foyer positif au sommet négatif est la corde d'un arc de cercle donné, la directrice sera la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette corde, et l'hyperbole passera par le tiers de l'arc qu'elle soutend.

Et comme il est facile d'obtenir successivement tous les points de cette hyperbole, en partant de la propriété qu'on vient de lui trouver, il est visible qu'on pourra l'employer avec avantage pour résoudre graphiquement le problême de la trissection de l'angle.

Si l'on veut prendre les asymptotes pour axes des coordonnées, il faut, dans l'équation aux diamètres, effacer les termes affectés de u^2 et de t^2, dont les coefficiens sont nuls en vertu des équations

$$\text{tang } p = \frac{b}{a}, \quad \text{tang } q = -\frac{b}{a};$$

elle se réduit alors à

$$\left.\begin{array}{r} 2b^2 \cos p \cos q \\ -\,2a^2 \sin p \sin q \end{array}\right\} ut = a^2 b^2,$$

et comme les mêmes équations donnent encore

$$-\,a^2 \sin p \sin q = b^2 \cos p \cos q,$$

et
$$\cos p = \cos q = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

on aura
$$ut = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

Dans cette équation aux asymptotes, on voit évidemment que l'ordonnée t est d'autant plus petite que u est plus grand, ou que le point que l'on considère s'éloigne de l'origine, mais qu'elle ne peut jamais devenir nulle.

Pour achever d'exposer les propriétés de l'hyperbole entre ses asymptotes, soient x' et y' les coordonnées d'un point pris sur la direction de la première, on aura

$$y' = \frac{b}{a} x',$$

et pour l'équation d'une droite quelconque menée par ce point,

$$y - \frac{b}{a} x' = A (x - x').$$

En désignant par z la distance du point dont les coordonnées sont x' et y' à un point quelconque de la direction de la droite, on aura ici, comme dans le cas du cercle,

$$x = x' + \frac{z}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad y = y' + \frac{Az}{\sqrt{1 + A^2}},$$

et en mettant ces valeurs dans l'équation

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

on trouvera pour déterminer les distances z du point x', y' aux deux points où la droite en question vient rencontrer l'hyperbole, l'équation

$$z^2 + \frac{2bx' \sqrt{1 + A^2}}{b + aA} z - \frac{a^2 b^2 (1 + A^2)}{b^2 - a^2 A^2} = 0,$$

dans laquelle

$$- \frac{2bx' \sqrt{1 + A^2}}{b + aA}$$

représente

représente la somme $z' + z''$ de ces deux distances.

D'un autre côté, si l'on fait la substitution des mêmes valeurs de x et de y dans l'équation

$$y = -\frac{b}{a}x,$$

de la seconde asymptote, on aura, pour l'expression de la distance du point x', y', au point où cette asymptote est rencontrée par la droite

$$z = -\frac{2bx'\sqrt{1+A^2}}{b+aA} = z' + z''.$$

Des trois quantités z, z', z'', la première est la portion de la droite comprise entre les deux asymptotes, la seconde peut représenter la partie de cette droite interceptée entre la première branche et son asymptote, et dès-lors, la troisième représente la partie interceptée entre la même asymptote et la seconde branche. Or z se compose évidemment de cette dernière partie, et de la partie qu'interceptent la seconde branche et son asymptote. On aura donc, en désignant par $z_,$ cette nouvelle portion,

$$z_, + z'' = z' + z'',$$

ou seulement $$z_, = z',$$

d'où il suit que *si l'hyperbole est coupée par une droite quelconque, les parties de cette droite interceptées entre chaque branche de la courbe et son asymptote sont égales entr'elles.*

Cette propriété fournit un moyen facile de construire l'hyperbole, lorsqu'on connaîtra les asymptotes et un seul de ses points. On mènera par ce point une infinité de droites, et en portant sur chacune d'elles et à partir de

l'une des asymptotes, une quantité égale à la portion comprise entre le point et l'autre asymptote, on déterminera une suite de points qui appartiendront à l'hyperbole.

Dans l'équation qui donne z, on a

$$z' z'' = -\frac{a^2 b^2 (1 + A^2)}{b^2 - a^2 A^2},$$

et comme ce produit est indépendant des coordonnées du point de la première asymptote par lequel on a mené la droite, il appartiendra encore à toutes les parallèles à cette droite, ensorte que *pour tant de lignes que l'on voudra, menées parallèlement entr'elles et de manière à couper les deux asymptotes, le rectangle formé par les parties comprises entre l'un des points où l'hyperbole est rencontrée, et chacune de ces droites, est constamment le même et égal à* $-\frac{a^2 b^2 (1 + A^2)}{b^2 - a^2 A^2}$.

Si $A = \infty$, ou si toutes ces droites sont perpendiculaires aux x, $-\frac{a^2 b^2 (1 + A^2)}{b^2 - a^2 A^2}$ devient égal à b^2, et le rectangle en question équivaut au carré construit sur le demi-second axe de l'hyperbole.

Nous bornerons ici l'examen de la seconde variété des courbes du second degré qui n'ont pas de centre; il resterait encore pour completter l'étude de ce premier genre, à considérer la troisième variété qui a pour équation

$$ny^2 - mx^2 = p,$$

mais comme cette équation est précisément de la même forme que celle de la seconde variété, en y changeant x en y et réciproquement, il est facile de voir qu'elle représente une hyperbole qui jouira par rapport à l'axe des y, des mêmes propriétés que la première par rapport à l'axe

des x ; ainsi, nous nous dispenserons d'entrer dans aucun détail sur cette courbe, que la discussion de la précédente a suffisamment fait connaître, et nous allons passer à l'examen des courbes du second genre.

Des Courbes du second degré qui sont dépourvues de centre.

De la Parabole.

L'équation des courbes de ce second genre, est

$$Ny^2 + Px = 0,$$

et il est clair qu'elle ne peut exprimer quelque chose qu'autant qu'on pourra la mettre sous cette forme

$$Ny^2 = Px,$$

ou

$$y^2 = px.$$

Ainsi, il n'y a qu'une seule courbe du second degré qui soit dépourvue de centre. On lui a donné le nom de *parabole*, et à la constante p le nom de *paramètre*. Dans l'examen que nous allons en faire, nous supposerons d'abord, pour plus de simplicité, que les coordonnées x et y sont perpendiculaires entr'elles.

La substitution des coordonnées polaires r et φ, au lieu des coordonnées rectangulaires x et y, donne, après la supposition de $r = \infty$,

$$\sin \varphi = 0,$$

valeur qui indique que la courbe, à mesure qu'elle s'éloigne de l'origine, tend à devenir parallèle aux x, et en effet, il est facile de voir en rapprochant son équation de celle de l'ellipse

$$y^2 = \frac{p}{2a}(2ax - x^2) = px - \frac{p}{2a}x^2,$$

qu'elle n'est qu'une demi-ellipse, infiniment alongée puisque pour $a = \infty$, les deux équations deviennent identiquement les mêmes.

Les valeurs de y ne pouvant être réelles qu'autant que les deux quantités p et x sont de même signe, il s'ensuit que la courbe ne peut jamais s'étendre que dans un sens, dans celui des x positifs, si p est positif, et dans celui des x négatifs, si p est négatif. Il est d'ailleurs facile de voir que dans chaque cas elle s'étend également au-dessus et au-dessous de l'axe des x.

Nous avons défini foyer un point dont la distance à chaque point de la courbe est une fonction rationnelle de l'abscisse de ce point. Soient c et d les coordonnées d'un tel point pris dans le plan de la parabole, et z sa distance à un point quelconque de la courbe, on aura

$$z = \sqrt{(c-x)^2 + (d-y)^2}$$

$$= \sqrt{(c-x)^2 + (d - \sqrt{px})^2}$$

et cette expression ne saurait être rationnelle en x, qu'autant qu'on aura d'abord $d = 0$, et en second lieu, $p - 2c = 2c$, ou $c = \frac{p}{4}$; il existe donc sur l'axe un point unique distant du sommet de la quantité $\frac{p}{4}$, et tel que sa distance à chaque point de la courbe a pour expression $\frac{p}{4} + x$, c'est-à-dire, est égale à l'abscisse de ce point augmentée du quart du paramètre.

Pour trouver l'ordonnée du foyer, on fera $x = \frac{p}{4}$ dans

l'équation $y^2 = px$, ce qui donnera

$$y^2 = \frac{p^2}{4}, \text{ et par conséquent } y = \frac{p}{2};$$

ainsi le paramètre de la parabole n'est autre chose que la double ordonnée qui passe par le foyer.

Si, perpendiculairement à l'axe des x et à la distance $\frac{p}{4}$ de l'origine, on mène une droite, il est clair que la distance de chaque point de la courbe à cette droite, que l'on nomme *directrice*, aura aussi pour expression $\frac{p}{4} + x$; ainsi *la parabole a la propriété d'avoir chacun de ses points autant éloigné d'une droite donnée de position que d'un point fixe également donné de position.*

De là suit un moyen fort simple de décrire la parabole par points. On prendra sur l'axe des x autant de points que l'on voudra, et on mènera par chacun d'eux des parallèles à la directrice. En coupant ensuite chaque parallèle par un arc décrit du foyer comme centre, et avec la distance de la parallèle à la directrice pour rayon, on déterminera une suite de points qui appartiendront à la parabole, puisqu'ils seront tous à égale distance du foyer et de la directrice.

Si l'on veut prendre pour coordonnées le rayon vecteur z, et l'angle ϕ qu'il fait pour chaque point avec l'axe des x, on aura

$$1 : \sin\phi \,|: \cos\phi :: z : y : \frac{p}{4} - x,$$

et par conséquent

$$y = z \sin\phi, \quad x = \frac{p}{4} - z\cos\phi,$$

lesquelles valeurs étant mises dans l'équation

$$y^2 = px,$$

donneront

$$z^2 \sin \varphi^2 = \frac{p^2}{4} - pz \cos \varphi,$$

où

$$z^2 = \frac{p^2}{4} - pz \cos \varphi + z^2 \cos \varphi^2 = \left(\frac{p}{2} - z \cos \varphi\right)^2;$$

et enfin pour l'équation polaire de la parabole

$$z = \frac{p}{2(\mp 1 + \cos \varphi)};$$

c'est-à-dire

$$z = \frac{p}{4}(\sec \tfrac{1}{2}\varphi)^2 \quad \text{ou} \quad z = -\frac{p}{4}(\operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\varphi)^2.$$

Ces formules, comme l'équation $y^2 = px$, pourront servir à construire la courbe, et chaque valeur de φ donnera pour z deux valeurs inégales et de signe contraire. Par exemple, si l'on fait $\varphi = 0$, on aura

$$z = \frac{p}{4} \text{ et } z = \frac{p}{0},$$

c'est-à-dire, que l'on aura d'abord le sommet de la parabole, et ensuite le point infiniment éloigné, où devenant parallèle aux abcisses, elle tend à rencontrer leur axe.

On a vu dans le commencement de ce chapitre, que les courbes du second degré, qui sont dépourvues de centre, ont une infinité de diamètres, et qu'en prenant l'un quelconque d'entr'eux pour axe des abscisses, pour origine le point où il rencontre la courbe, et pour axe des ordonnées la tangente en ce point, l'équation est toujours de

la forme $y^2 = px$; nous n'avons encore considéré que celui de ces diamètres pour lequel les ordonnées sont perpendiculaires aux abscisses : nous allons maintenant examiner les autres, et pour cela transformer la relation entre les coordonnées rectangulaires x et y en une autre relation entre les coordonnées obliques u et t.

Or il est clair qu'on ne saurait arriver à une équation de la forme

$$y^2 = px,$$

en substituant pour x et y les valeurs ordinaires,

$$u\cos q + t\cos p, \qquad u\sin q + t\sin p,$$

puisqu'on n'introduit par-là que deux indéterminées, et qu'il y aurait trois termes à faire disparaître dans la transformée que fournirait cette substitution ; ainsi il faut nécessairement déplacer l'origine, en substituant à x et y leurs valeurs générales

$$u\cos q + t\cos p + a$$
$$u\sin q + t\sin p + b,$$

ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{r} \sin q^2\, u^2 + 2\sin p\sin q\, ut + \sin p^2\, t^2 \\ +(2b\sin q - p\cos q)\, u + (2b\sin p - p\cos p)\, t \\ +b^2 - pa \end{array}\right\} = 0,$$

pour l'équation de la parabole rapportée à deux axes quelconques menés dans son plan.

Pour que l'axe des u soit un diamètre, et l'axe des t une tangente au sommet de ce diamètre, il faut que cette équation se réduise à

$$t^2 = \frac{p\cos q - 2b\sin q}{\sin p^2}u,$$

et par conséquent que l'on ait :

$$\sin q^2 = 0, \qquad 2b \sin p - p \cos p = 0,$$
$$\sin p \sin q = 0, \qquad b^2 - pa = 0.$$

La première de ces équations donnant

$$\sin q = 0,$$

nous apprend que tous les diamètres de la parabole sont parallèles à l'axe; la seconde en est une conséquence, et n'apprend rien de plus; la troisième donne

$$\sin p^2 = \frac{p^2}{4b^2 + p^2}, \text{ ou plutôt } \sin p^2 = \frac{p}{4a + p},$$

puisqu'on tire de la dernière $b^2 = pa$; et ces différentes valeurs substituées dans l'équation

$$t^2 = \frac{p \cos q - 2b \sin q}{\sin p^2} u,$$

donnent $$t^2 = (4a + p)\, u,$$

équation semblable à celle qui se rapporte au diamètre principal, et de laquelle il suit que *quel que soit l'angle des coordonnées, les carrés des ordonnées à la parabole sont proportionnels aux abscisses correspondantes.*

Il est facile de voir que le paramètre du nouveau diamètre équivaut à $4\left(a + \frac{p}{4}\right)$, et comme a est l'abscisse de son sommet, et par conséquent $a + \frac{p}{4}$ la distance de ce sommet au foyer, on en conclura que *le paramètre d'un diamètre quelconque n'est autre chose que le quadruple de la distance de son sommet au foyer*, et c'est aussi ce que l'on a remarqué pour le paramètre du diamètre principal.

Des Tangentes aux courbes du second degré.

Après avoir examiné successivement toutes les courbes du second degré pour déterminer les propriétés dont elles jouissent par rapport à leurs axes, leurs foyers et leurs diamètres, nous allons les considérer toutes ensemble pour déterminer celles dont elles jouissent par rapport à leurs tangentes. La méthode que nous emploierons dans cette recherche différera, à quelques égards, de celle que nous avons suivie pour le cercle, mais en nous conduisant au but par des considérations également simples, elle nous donnera lieu de remarquer plusieurs belles propriétés, que la première ne nous eût pas fait connaître d'une manière aussi directe.

Afin que les résultats auxquels nous serons conduits appartiennent à toutes les courbes du second degré à-la-fois, nous prendrons l'équation

$$My^2 + Nx^2 + Px = 0,$$

qui les comprend toutes, et pour plus de simplicité nous l'écrirons de cette manière

$$y^2 = mx + nx^2,$$

les quantités m et n étant $\frac{2b^2}{a}$ et $-\frac{b^2}{a^2}$ pour l'ellipse, $\frac{2b^2}{a}$ et $\frac{b^2}{a^2}$ pour l'hyperbole, p et 0 pour la parabole.

Soit maintenant

$$y - \zeta = A(x - \alpha)$$

l'équation d'une droite menée d'une manière quelconque par le point α, ζ; si l'on substitue dans la première équa-

tion la valeur que donne celle-ci pour y, on aura la résultante

$$x^2 + 2\frac{A(\mathfrak{C} - Aa) - \frac{m}{2}}{A^2 - n}x + \frac{(\mathfrak{C} - Aa)^2}{A^2 - n} = 0 \qquad (1)$$

dont les deux racines sont les abscisses des deux points où la droite peut, en général, rencontrer la courbe du second degré.

Cela posé, si la droite tourne autour du point α, $\mathfrak{C}$ en tendant continuellement à sortir de la courbe, il est clair que les deux valeurs de x tendront en même-tems vers l'égalité, ensorte qu'elles seront égales lorsque, les deux points d'intersection se réunissant, la droite deviendra tangente.

Si donc on établit que les deux racines de l'équation (1) sont égales, en posant

$$\left(A(\mathfrak{C} - Aa) - \frac{m}{2}\right)^2 = (\mathfrak{C} - Aa)^2(A^2 - n), \qquad (2)$$

l'équation

$$A^2 - \frac{(m + 2n\alpha)\mathfrak{C}}{m\alpha + n\alpha^2}A + \frac{m^2 + 4n\mathfrak{C}^2}{4(m\alpha + n\alpha^2)} = 0 \qquad (3)$$

que l'on obtiendra de cette manière, fournira la valeur que doit avoir l'indéterminée A, pour satisfaire à cette condition, c'est-à-dire, donnera la tangente trigonométrique de l'angle que doit faire avec l'axe des x la droite menée par le point α, $\mathfrak{C}$ pour être tangente à la courbe du second degré.

L'équation (3) étant du second degré, conduira, en général, à deux valeurs différentes de A; ainsi le problême de mener une tangente à une courbe du second

degré, pourra être résolu par deux droites, et en désignant par A' et A'' les tangentes des angles qu'elles feront avec l'axe des abscisses, on aura

$$A'A'' = \frac{m^2 + 4n\mathcal{C}^2}{4(m\alpha + n\alpha^2)}.$$

Si ces deux tangentes sont perpendiculaires entr'elles, le produit $A'A''$ sera égal à -1, et l'on aura entre les quantités α et $\mathcal{C}$, la relation

$$\mathcal{C}^2 + \alpha^2 + \frac{m}{n}\alpha + \frac{m^2}{4n} = 0 \qquad (4).$$

Cette équation de condition à laquelle doivent alors satisfaire les coordonnées du point α, $\mathcal{C}$ appartenant, en général, à une circonférence de cercle, on en conclura qu'on ne saurait mener à une courbe du second degré deux tangentes perpendiculaires entr'elles, qu'autant que le point commun de ces deux tangentes sera placé sur la circonférence du cercle dont l'équation est

$$\mathcal{C}^2 + \alpha^2 + \frac{m}{n}\alpha + \frac{m^2}{4n} = 0,$$

et réciproquement, que si ayant mené à une courbe du second degré deux tangentes perpendiculaires entr'elles, on fait mouvoir ces deux tangentes, sans qu'elles cessent d'être perpendiculaires et de toucher la courbe, la suite de toutes les positions du sommet de l'angle droit mobile sera une circonférence de cercle.

Pour voir plus particulièrement quelle est la position de ce cercle, on ramènera d'abord l'origne des coordonnées au centre en posant $\alpha = \alpha' - \frac{m}{2n}$; α' sera la nouvelle abscisse prise du centre, $\frac{m}{2n}$ l'abscisse de ce centre par

rapport aux axes primitifs, et comme cette dernière quantité est aussi celle dont il faudrait augmenter chaque valeur de x dans l'équation

$$y^2 = mx + nx^2,$$

pour que l'axe des y passât le centre des courbes qu'elle représente, il est d'abord clair que le cercle en question a son centre au centre même de la courbe du second degré, et par conséquent que pour la parabole, il est à une distance infinie du sommet.

En second lieu, comme la transformation que l'on vient d'indiquer conduit à l'équation

$$\zeta^2 + \alpha'^2 = \frac{m^2}{4n^2}(1 - n),$$

on verra facilement, en y mettant pour m et n les valeurs de ces quantités particulières à chaque courbe du second degré, que le rayon de ce cercle est pour l'ellipse $\sqrt{a^2 + b^2}$, c'est-à-dire, la droite qui joint les extrémités des deux axes; pour l'hyperbole $\sqrt{a^2 - b^2}$, ou la tangene menée par l'extrémité du premier axe à un cercle décrit du centre de l'hyperbole avec un rayon égal à la moitié du second, et enfin qu'il est infini pour la parabole; mais comme, pour cette dernière courbe, on a, en substituant p et o pour m et n dans l'équation (4),

$$\alpha = -\frac{p}{4},$$

équation qui est celle de la directrice, il est en même temps visible que cette droite remplace ici la ligne qui, pour les deux autres courbes, est une circonférence de cercle.

Si l'une des deux tangentes est parallèle à l'axe des x, le produit $A'A''$ sera nul ; il sera infini, si l'une de ces tangentes est perpendiculaire au même axe ; ainsi l'on reconnaîtra les points des courbes du second degré pour lesquels ces différentes circonstances ont lieu, en posant

$$m^2 + 4n\mathfrak{c}^2 = 0 \text{ pour le premier cas,}$$
$$m\alpha + n\alpha^2 = 0 \text{ pour le second.}$$

On tire de la première équation

$$\mathfrak{c} = \pm \frac{m}{2}\sqrt{-\frac{1}{n}},$$

c'est-à-dire, que dans toute l'étendue de la tangente, et par conséquent aussi pour le point de contact, l'ordonnée sera $\pm \frac{m}{2}\sqrt{-\frac{1}{n}}$; ces valeurs étant infinies pour la parabole et imaginaires pour l'hyperbole, ces courbes n'ont pas de tangentes parallèles aux abscisses ; mais pour l'ellipse elles deviennent $= \pm b$, et indiquent les tangentes qui passent par les extrémités du petit axe.

On tire ensuite de la seconde équation

$$\alpha = 0, \quad \alpha = -\frac{m}{n} ;$$

ainsi, pour toutes les courbes du second degré, il y a deux points où la tangente devient perpendiculaire aux abscisses : pour le premier on a $\alpha = 0$, c'est l'origine des coordonnées ou le sommet de la courbe. Pour le second on a..... $\alpha = -\frac{m}{n}$; c'est dans l'ellipse l'extrémité du grand axe, dans l'hyperbole le sommet de la seconde branche, et dans la parabole le point infiniment éloigné où elle tend à venir rencontrer l'axe des x.

Si les deux tangentes sont symétriques par rapport à la courbe, c'est-à-dire, si la droite qui divisera leur angle en deux parties égales, partage aussi la courbe en deux parties égales et semblables, les tangentes des angles qu'elles feront avec l'axe des x ne différeront que par le signe, ensorte qu'on aura

$$A' + A'' = 0, \text{ ou } \frac{(m + 2n\alpha)\mathfrak{C}}{m\alpha + n\alpha^2} = 0,$$

ce qui pourra avoir lieu, soit que $\mathfrak{C} = 0$, soit que.....; $\alpha = -\frac{m}{2n}$.

En joignant à l'équation $\mathfrak{C} = 0$, l'équation

$$A^2 + \frac{m^2}{4(m\alpha + n\alpha^2)} = 0,$$

à laquelle l'équation (3) se trouve alors réduite, on voit facilement que le point α, $\mathfrak{C}$ sera pris de manière à satisfaire à la condition proposée, si d'abord il est sur l'axe des x et si de plus son abscisse rend négative la quantité $m\alpha + n\alpha^2$, c'est-à-dire, s'il est pris pour l'ellipse au-delà des deux sommets, pour l'hyperbole entre les deux sommets, et pour la parabole au-delà du sommet unique.

En prenant ensuite l'équation

$$\alpha = -\frac{m}{2n},$$

et la combinant avec l'équation

$$A^2 - \frac{n(m^2 + 4n\mathfrak{C}^2)}{m^2} = 0,$$

dans laquelle se change alors l'équation (3), il est clair que la condition proposée sera encore satifaite pour le deux premières courbes, si le point α, $\mathfrak{C}$ est pris pour

l'ellipse sur le petit axe au-delà des deux points où il est rencontré par la courbe, et pour l'hyperbole en un point quelconque du second axe.

Ces différentes propriétés supposent les valeurs de A déterminées par des conditions particulières, et ne se rapportent par conséquent qu'à certaines positions du point de contact; on en obtiendra qui auront lieu quelque part qu'on le place sur la courbe, en partant des équations (1) et (2) laissées dans toute leur généralité.

Mais on observera que la première étant devenue un carré par la condition que la seconde exprime, peut s'écrire sous cette forme plus simple

$$x+\frac{A(\mathfrak{C}-A\alpha)-\frac{m}{2}}{A^2-n}=0,$$

et que toutes deux se réduiront davantage encore si, mettant au lieu de m et de n les valeurs que prennent ces quantités lorsqu'il est question de l'ellipse, on rapporte en même tems les coordonnées au centre, en posant

$$x=a-x',\ \alpha=a-\alpha',$$

x' et α' étant de nouvelles abscisses prises du centre.

Par-là l'équation (1) donnera pour l'ordonnée du point de contact $x'=\frac{a^2A(\mathfrak{C}+\alpha'A)}{a^2A^2+b^2}$ ou seulement

$$x'=\frac{a^2A}{\mathfrak{C}+\alpha'A},$$

puisque les mêmes substitutions faites dans l'équation (2) conduisent à

$$a^2A^2+b^2=(\mathfrak{C}+\alpha'A)^2.$$

L'équation de la tangente $y-\mathfrak{C}=A(x-\alpha)$ deviendra dans les mêmes circonstances,

$$y - \mathfrak{C} = A(\alpha' - x'),$$

et en y mettant pour x' sa valeur déduite de l'équation (1), on aura, pour l'ordonnée du point de contact,

$$y = \frac{b^2}{\mathfrak{C} + \alpha' A};$$

lisons maintenant dans ces différens résultats.

L'équation (2), sous sa nouvelle forme, met d'abord en évidence une propriété remarquable des tangentes aux courbes du second degré. On en tire en effet

$$(\mathfrak{C} + \alpha' A + aA)(\mathfrak{C} + \alpha' A - aA) = b^2;$$

or $\mathfrak{C} + \alpha' A + aA$, $\mathfrak{C} + \alpha' A - aA$ sont les valeurs de y répondant aux abscisses $-a$ et $+a$ dans l'équation de la tangente, c'est-à-dire, les ordonnées à cette ligne qui se mesurent sur les deux tangentes perpendiculaires aux abscisses; donc, pour les courbes du second degré qui ont un centre, la tangente d'un point quelconque coupe, sur les perpendiculaires élevées au sommet du premier axe, des parties dont le produit est constamment le même.

Si ensuite on prend les expressions générales des coordonnées du point de contact

$$x' = \frac{a^2 A}{\mathfrak{C} + \alpha' A}, \quad y = \frac{b^2}{\mathfrak{C} + \alpha' A},$$

et qu'on les divise l'une par l'autre, on aura entre ces coordonnées la relation

$$y = \frac{b^2}{a^2 A} x',$$

et, en y mettant successivement pour A ses deux valeurs A' et A'', les deux équations

$$y =$$

$$y = \frac{b^2}{a^2 A'} x', \quad y = \frac{b^2}{a^2 A''} x',$$

que l'on obtiendra, seront celles de deux droites menées par le centre de la courbe du second degré et par chacun des points où la touchent les deux tangentes qu'on peut lui mener du point $\alpha', \mathcal{C}$.

Mais si, sans rien dire de particulier sur A, on élimine cette quantité entre les deux équations

$$y = \frac{b^2}{a^2 A} x', \quad y - \mathcal{C} = A(\alpha' - x'),$$

qui appartiennent à deux droites dont l'intersection détermine le point de contact, puisque la première étant celle de la droite qui le joint avec le centre, la seconde est celle de la tangente elle-même, l'équation résultante

$$a^2 y^2 + b^2 x'^2 - a^2 \mathcal{C} y - b^2 \alpha' x' = 0,$$

se rapportera uniquement à cette intersection, et comme elle reste la même pour les deux valeurs dont A est susceptible, il est clair qu'elle sera l'équation d'une ligne qui passera par les deux points de contact, et qui les déterminera par ses intersections avec la courbe du second degré.

Il n'est pas moins clair que, sous sa forme actuelle, cette équation est celle d'une ellipse, qu'elle devient celle d'une hyperbole en y changeant le signe de b^2, et celle d'un cercle en y posant $a = b$; que dans tous les cas, la courbe qu'elle construit a son centre au point dont les coordonnées sont $\frac{\alpha'}{2}, \frac{\mathcal{C}}{2}$, c'est-à-dire, au milieu de la droite qui joint le centre de la courbe proposée avec le point $\alpha', \mathcal{C}$, puisque, par la règle connue pour faire disparaître le second terme d'une équation, il faudrait, pour

transporter l'origine au centre, diminuer respectivement les variables x' et y des quantités $\frac{\alpha'}{2}$, $\frac{\zeta}{2}$; qu'elle a, pour sommets, les points dont les coordonnées sont $x' = 0$ et $y = 0$, $x' = \alpha'$ et $y = \zeta$, et par conséquent pour axe principal la distance même $\sqrt{\alpha'^2 + \zeta^2}$ du centre de la courbe donnée au point $\alpha' \zeta$; et enfin que son second axe ou la double valeur de y qui répond à $x = \frac{\sqrt{\alpha'^2 + \zeta^2}}{2}$ lorsqu'ayant fait $\zeta = 0$ on change α' en $\sqrt{\alpha'^2 + \zeta^2}$, ce qui revient à faire tourner l'axe principal jusqu'à ce qu'il vienne se confondre avec celui de la première courbe, sera

$$\frac{b}{a}\sqrt{\alpha'^2 + \zeta^2}, \quad \frac{b\sqrt{-1}}{a}\sqrt{\alpha'^2 + \zeta^2},$$

ou seulement

$$\sqrt{\alpha'^2 + \zeta^2},$$

suivant que cette première courbe sera une ellipse, une hyperbole ou un cercle.

La solution graphique du problême de mener une tangente à une courbe du second degré par un point qui lui est extérieur, est donc toute entière renfermée dans la dernière équation, et on voit qu'elle consiste à joindre ce point avec le centre de la courbe donnée, et à en construire une autre de même espèce, en prenant pour axe principal la droite menée entre ces deux points et pour second axe une quatrième proportionnelle à cette distance et aux deux axes de la courbe proposée; mais on sent, en même tems, qu'excepté le cas du cercle où la courbe à construire est une autre circonférence de cercle, cette solution est dans la pratique d'une exécution difficile, et nous allons voir comment on peut, en partant de ce premier cas, lui ramener les deux autres.

Outre l'équation

$$a^2y^2 + b^2x'^2 - a^2\zeta y - b^2\alpha' x' = 0,$$

on a encore entre x' et y l'équation

$$a^2y^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$$

qui exprime que le point dont ces quantités sont les coordonnées est un de ceux de la courbe du second degré; et si on retranche ces deux relations l'une de l'autre, on trouve, entre les mêmes quantités, cette autre équation

$$a^2\zeta y + b^2\alpha' x' = a^2b^2,$$

qui n'étant plus que du premier degré appartient nécessairement à une ligne droite.

Puisque cette nouvelle équation est une conséquence de la combinaison des deux premières, il faudra que la ligne droite qui en est le lieu, rencontre à-la-fois les deux premières lignes, et comme elles n'ont de communs que les points de contact, il est évident que cette droite est la corde même qui, dans la courbe du second degré, passe par ces deux points; il l'est également que, parce qu'elle est plus facile à construire que la ligne représentée par la première équation, elle pourra aussi, plus facilement qu'elle, conduire à la solution du problême qui nous occupe.

Soit, en effet, T (*fig.* 20) le point pris hors de la courbe et dont les coordonnées CP et CQ sont supposées α' et ζ; si dans l'équation trouvée on égale successivement à zéro chacune des coordonnées, on aura $\frac{a^2}{\alpha'}$ pour l'abscisse du point où la corde qui joint les deux points de contact vient rencontrer l'axe des x, et $\frac{b^2}{\zeta}$ pour l'ordonnée du point où la même ligne coupe l'axe des y, ensorte qu'il ne s'agit

plus pour avoir cette ligne que de construire ces deux expressions.

Pour la première, il suffira de décrire sur l'axe principal AB un demi-cercle ADB et de lui mener du point P la tangente PD; l'abscisse CE du point de contact sera $\frac{a^2}{\alpha'}$ puisque, par la propriété du triangle rectangle, on a

$\overline{CD}^2 = CP.\ CE$ ou $a^2 = \alpha'.\ CE$.

Pour la seconde, on mènera à un cercle décrit sur le petit axe une tangente QF, et l'ordonnée CG du point de contact étant $\frac{\overline{CF}^2}{CQ}$, aura pour valeur $\frac{b^2}{\zeta}$.

La droite cherchée passera donc par les points G et E, et les points M et M' où elle rencontrera la courbe du second degré, seront les points où cette courbe peut être touchée par les tangentes menées du point T.

On déduit encore et presque immédiatement de l'équation

$$a^2 \zeta y + b^2 \alpha' x' = a^2 b^2$$

une autre propriété remarquable des courbes du second degré.

Supposons, en effet, que le point α', ζ appartienne à une droite connue dont l'équation soit

$$y = \lambda x' + \mu,$$

on aura

$$\zeta = \lambda \alpha' + \mu,$$

et l'équation de la corde prendra cette forme

$$(a^2 \lambda y + b^2 x')\,\alpha' + a^2 \mu y = a^2 b^2$$

sous laquelle il est visible qu'on peut lui satisfaire indépendamment de toute valeur donnée à α', en posant

$$a^2 \lambda y + b^2 x' = 0$$
$$\mu y = b^2,$$

c'est-à-dire, au moyen des équations de deux droites fixes quelque part que soit pris le point α, ζ sur la droite donnée, et déterminées de position par celle de cette droite et par l'espèce de la courbe du second degré.

Puisque l'équation

$$(a^2 \lambda y + b^2 x')\, \alpha' + a^2 \mu y = a^2 b^2$$

est satisfaite par les valeurs de x et de y que donnent les deux autres, il est clair que la corde variable qu'elle représente passera dans chacune de ses positions par le point d'intersection des lignes représentées par ces deux dernières, et cette considération conduit immédiatement aux deux propositions suivantes ;

Etant données dans un plan une courbe du second degré AFE (*fig.* 21) et une droite quelconque BC; si, après avoir mené par un point quelconque D de la droite deux tangentes à la courbe et la droite EF qui passe par les deux points de contact, on conçoit que le point D se meuve le long de la droite et entraîne avec lui les deux tangentes, sans qu'elles cessent de toucher la courbe : les deux points de contact changeront de position, ainsi que la droite EF qui les joint; mais cette droite passera toujours par un même point N.

Réciproquement, si, par un point N pris dans le plan d'une courbe du second degré, on mène tant de droites EF qu'on voudra, qui couperont chacune la courbe en deux points, et si par ces deux points, on mène à la courbe deux tangentes ED, FD, qui se couperont quelque part en un point D, la suite de tous les points d'intersection trouvés de cette manière sera sur une même ligne droite.

Si $a=b$, l'équation $a^2\lambda y+b^2x'=0$ devient $\lambda y+x'=0$, ou celle de la perpendiculaire abaissée du centre sur la droite $y=\lambda x+\mu$; ainsi, pour le cercle en particulier, le point N (*fig.* 22) par lequel passe toujours la droite qui joint les deux points de contact se trouve sur la perpendiculaire AG abaissée du centre du cercle sur la droite BC; et, réciproquement, la suite de tous les points d'intersection des tangentes ED, FD, sera sur une même ligne droite perpendiculaire à AN.

Après avoir résolu le problême de mener une tangente à une courbe du second degré par un point α, ζ pris hors de l'espace qu'elle enferme, nous allons supposer maintenant que ce point est pris sur la courbe même; alors il se confondra avec le point de contact, et il y aura entre α et ζ la même relation qu'entre x et y, c'est-à-dire qu'on aura

$$\zeta^2=m\alpha+n\alpha^2$$

ce qui réduira l'équation (3) à la suivante

$$A^2-\frac{m+2n\alpha}{\zeta}A+\frac{(m+2n\alpha)^2}{4\zeta^2}=0,$$

d'où l'on déduira

$$A=\frac{m+2n\alpha}{2\zeta},$$

et, par conséquent pour l'équation de la tangente au point α, ζ de la courbe du second degré,

$$y-\zeta=\frac{m+2n\alpha}{2\zeta}(x-\alpha).$$

En faisant $y=0$ dans cette équation, on en tire pour la partie comprise entre le pied de l'ordonnée du point de contact et le point où la tangente rencontre l'axe

$$x - \alpha = - \frac{2C^2}{m + 2n\alpha};$$

on a donné à cette ligne le nom de *sous-tangente*; le signe — qui l'affecte indique qu'elle doit être prise à gauche de l'ordonnée.

Si par le point de contact on conçoit une droite perpendiculaire sur la tangente, son équation sera

$$y - C = - \frac{2C}{m + 2n\alpha} (x - \alpha);$$

ainsi $- \frac{2C}{m + 2n\alpha}$ sera la tangente de l'angle que cette perpendiculaire, qu'on appelle *normale*, fera avec l'axe des x; et $\frac{m + 2n\alpha}{2}$ ou la valeur de $x - \alpha$ correspondant à $y = 0$, sera la partie de l'axe comprise entre le point où il est rencontré par la normale et l'ordonnée du point de contact, c'est-à-dire la *sous-normale*.

Connaissant ainsi la sous-tangente et la sous-normale, il est clair que l'on aura, pour la portion de la tangente comprise entre le point de contact et l'axe des abscisses,

$$\frac{C}{m + 2n\alpha} \sqrt{4(n+1)C^2 + m^2},$$

et pour la longueur de la normale mesurée depuis le point de contact jusqu'à l'axe des abscisses

$$\frac{1}{2} \sqrt{4(n+1)C^2 + m^2},$$

puisque ces droites sont les hypothénuses de triangles rectangles qui ont pour côtés de l'angle droit la sous-tangente et l'ordonnée, ou la sous-normale et l'ordonnée.

De ces valeurs générales, on passera facilement à la valeur que prend chacune de ces lignes pour chaque courbe en particulier, en substituant les expressions convenables de m et de n; on aura de cette manière :
pour l'ellipse,

$$\text{Sous-tang} = -\frac{2ax-x^2}{a-x}, \quad \text{tang} = \sqrt{C^2+\left(\frac{2ax-x^2}{a-x}\right)^2}$$

$$\text{Sous-norm} = \frac{b^2}{a^2}(a-x), \text{norm} = \sqrt{C^2+\frac{b^4}{a^4}(a-x)^2},$$

pour l'hyperbole,

$$\text{Sous-tang} = -\frac{x^2-2ax}{x-a}, \quad \text{tang} = \sqrt{C^2+\left(\frac{x^2-2ax}{x-a}\right)^2}$$

$$\text{Sous-norm} = \frac{b^2}{a^2}(x-a), \quad \text{norm} = \sqrt{C^2+\frac{b^4}{a^4}(x-a)^2}$$

pour la parabole,

$$\text{Sous-tang} = -2x, \quad \text{tang} = 2\sqrt{x\left(x+\frac{p}{4}\right)},$$

$$\text{Sous-norm} = \frac{p}{2}, \quad \text{norm} = \sqrt{p\left(x+\frac{p}{4}\right)};$$

et lorsqu'il sera question de calculer, pour une abscisse donnée, les valeurs de la tangente et de la normale relatives aux deux premières courbes, il faudra mettre au lieu de C^2, $\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$, ou $\frac{b^2}{a^2}(x^2-2ax)$ suivant que la courbe proposée sera une ellipse ou une hyperbole.

En examinant ces différens résultats, on voit que la sous-tangente de l'ellipse est indépendante de b, ensorte qu'elle appartiendra à toutes les ellipses qui auront le même grand

axe $2a$, et par conséquent aussi, au cercle qui sera décrit sur cette ligne comme diamètre. On pourra donc mener la tangente en un point de l'ellipse, en prolongeant l'ordonnée de ce point jusqu'à la rencontre du cercle décrit sur son grand axe, déterminant celui où la tangente à ce cercle coupe l'axe des x, et joignant ensuite ce dernier point avec le point donné.

La sous-tangente de l'hyperbole présente un résultat analogue en partant de celle de l'hyperbole équilatère.

Enfin, pour la parabole, la sous-tangente est double de l'abscisse et indépendante du paramètre, ensorte qu'on la construira en portant sur le prolongement de l'axe une quantité égale à l'abscisse, et qu'elle conviendra alors à toutes les paraboles qui auront le même axe et le même sommet.

Au reste, chacune de ces expressions peut servir à mener une tangente à une courbe du second degré; par exemple, si, pour la parabole, on veut partir de l'expression de la tangente, il suffira de couper l'axe des x par un arc de cercle décrit du point de contact, comme centre, avec un rayon double d'une moyenne proportionnelle entre l'abscisse de ce point et sa distance au foyer, et de prolonger ensuite indéfiniment le rayon passant par ce point. Si l'on veut partir de l'expression de la normale, il faudra couper l'axe des x par un arc de cercle décrit du point de contact, comme centre, avec un rayon moyen proportionnel entre le paramètre et la distance de ce point au foyer, et lui élever par le point de contact une perpendiculaire indéfinie. On pourrait opérer d'une manière analogue pour les deux autres courbes.

Les expressions relatives à l'ellipse et à l'hyperbole, se présentent sous une forme plus simple, lorsqu'on trans-

porte l'origine des coordonnées du sommet de la courbe au centre, c'est-à-dire lorsqu'on fait

$$x = a - x', \text{ pour l'ellipse,}$$

$$x = a + x', \text{ pour l'hyperbole;}$$

en effet on a alors

$$\left.\begin{array}{l} a - x = x' \\ 2ax - x^2 = a^2 - x'^2 \end{array}\right\} \text{pour la première courbe,}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - a = x' \\ x^2 - 2ax = x'^2 - a^2 \end{array}\right\} \text{pour la seconde,}$$

et, en substituant ces valeurs dans les résultats obtenus plus haut, il vient : pour l'ellipse,

$$\text{sous-tang} = -\frac{a^2 - x'^2}{x'}, \quad \text{tang} = \sqrt{c^2 + \left(\frac{a^2 - x'^2}{x'}\right)^2};$$

$$\text{sous-norm} = \frac{b^2}{a^2}x', \quad \text{norm} = \sqrt{c^2 + \frac{b^4}{a^4}x'^2};$$

et pour l'hyperbole

$$\text{sous-tang} = -\frac{x'^2 - a^2}{x'}, \quad \text{tang} = \sqrt{c^2 + \left(\frac{x'^2 - a^2}{x'}\right)^2},$$

$$\text{sous-norm} = \frac{b^2}{a^2}x', \quad \text{norm} = \sqrt{c^2 + \frac{b^4}{a^4}x'^2};$$

c^2 étant $\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2)$ ou $\frac{b^2}{a^2}(x'^2 - a^2)$, suivant qu'il sera question de l'ellipse ou de l'hyperbole.

Si l'on fait les mêmes substitutions et les mêmes trans-

formations dans l'équation de la tangente, on trouvera

$$b^2 \alpha' x' \pm a^2 \mathfrak{C} y = a^2 b^2,$$

pour l'ellipse ou l'hyperbole, et

$$2\mathfrak{C} y = p(x + \alpha)$$

pour la parabole, les coordonnées étant prises du centre dans les deux premiers cas, et du sommet dans le troisième; et ces équations comparées à celles des rayons vecteurs, vont nous conduire à un moyen simple et uniforme pour mener, par un point donné d'une courbe du second degré, une tangente à cette courbe.

Si la courbe du second degré est un ellipse, on a, $+c$ et $-c$, ou $+\sqrt{a^2-b^2}$ et $-\sqrt{a^2-b^2}$ pour les abscisses de ses foyers. Ainsi les équations des rayons vecteurs menés au point de contact, sont

$$y-\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{C}}{\alpha'-c}(x'-\alpha'), \quad y-\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{C}}{\alpha'+c}(x'-\alpha'),$$

et ils font avec l'axe des x des angles qui ont respectivement pour tangentes $\frac{\mathfrak{C}}{\alpha'-c}$ et $\frac{\mathfrak{C}}{\alpha'+c}$.

Cela posé, a et a' étant les tangentes des angles que deux droites font avec les abscisses, $\frac{a-a'}{1+aa'}$ est celle de l'angle qu'elles comprennent; on pourra donc former sur ce modèle la tangente de l'angle que le premier rayon vecteur fait avec la tangente à la courbe, et on trouvera pour son expression,

$$\frac{a^2\mathfrak{C}^2 + b^2\alpha'^2 - b^2\alpha' c}{\mathfrak{C}((a^2-b^2)\alpha' - a^2 c)},$$

ou $$-\frac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}c},$$

en mettant, dans le numérateur, $a^2 b^2$ pour $a^2 \mathfrak{C}^2 + b^2 a'^2$ et dans le dénominateur, c^2 au lieu de $a^2 - b^2$.

L'équation du second rayon vecteur ne différant de celle du premier que par le signe de c, on aura $\frac{b^2}{\mathfrak{C}c}$ pour la tangente de l'angle qu'il fait avec la tangente à la courbe, et par conséquent $-\frac{b^2}{\mathfrak{C}c}$ pour celle du supplément de cet angle. Or, des tangentes égales pour le signe et la quantité répondent à des angles égaux; ainsi, les rayons vecteurs menés à un même point de l'ellipse, font des angles égaux avec la tangente en ce point, et cette conclusion s'étend aussi à l'hyperbole, puisque l'équation de cette courbe, lorsque les coordonnées partent du centre, ne diffère de celle de l'ellipse que par le signe de b^2.

Si la courbe du second degré est une parabole dont la tangente ait pour équation

$$y = \frac{p}{2\mathfrak{C}}(x+\alpha),$$

et dont le foyer ait pour abscisse $\frac{p}{4}$, on aura pour l'équation du rayon vecteur mené de ce foyer au point de contact,

$$y = \frac{4\mathfrak{C}}{4\alpha - p}(x-\alpha),$$

et par conséquent pour la tangente de l'angle que fait ce rayon vecteur avec la tangente à la courbe,

$$\frac{4\mathfrak{C}^2 + p^2}{2\mathfrak{C}(4\alpha + p)} = \frac{p}{2\mathfrak{C}};$$

mais l'angle de la dernière ligne avec l'axe des x, ou avec une parallèle menée par le point de contact à cet axe, a aussi pour tangente $\frac{p}{2\zeta}$; ainsi la tangente en un point quelconque de la parabole, divise en deux parties égales l'angle formé par le rayon vecteur à ce point, et par la perpendiculaire abaissée du même point sur la directrice.

De ces propriétés, on tire facilement la règle annoncée pour déterminer la position de la tangente en un point M d'une courbe du second degré : il faudra pour l'ellipse (*fig.* 23), prolonger le rayon vecteur FM d'une quantité MD égale à $F'M$, et du point M abaisser une perpendiculaire sur la droite $F'D$; pour l'hyperbole (*fig.* 24), prendre sur l'un des rayons vecteurs FM une quantité MD égale au second, et mener MT perpendiculaire à DF; et enfin pour la parabole (*fig.* 25), mener par le point M une parallèle MH à l'axe des x, et abaisser du même point la perpendiculaire MT sur HF.

Ces constructions trouvent évidemment leur démonstration dans ce qui précède; mais il est au reste facile de les démontrer, comme les anciens, par des raisonnemens purement synthétiques.

Pour l'ellipse (*fig.* 23), il suffit de faire voir que la somme des droites menées des foyers à tout autre point N de la tangente, est plus grande que l'axe AB; et en effet, si l'on tire FD et ND, on aura

$$FN + ND > FD,$$

ou
$$FN + F'N > FM + F'M,$$

et par conséquent

$$FN + F'N > AB.$$

Pour l'hyperbole (*fig.* 24), on aura

$$FN - ND > F'D,$$

ou $$FN - F'N > FM - F'M,$$

c'est-à-dire $$FN - F'N > AB,$$

ainsi le point N n'est d'abord pas sur la courbe ; en second lieu, il n'est pas intérieur à la courbe, puisqu'il faudrait que la différence $FN - F'N$ fût plus petite que l'axe.

Enfin, pour la parabole (*fig.* 25), en menant à un point quelconque N de la droite MT le rayon vecteur FM, abaissant de ce point la perpendiculaire NG sur la directrice, et tirant NH, on aura

$$FN \text{ ou } NH > GN,$$

ce qui ne saurait avoir lieu, si le point N était sur la courbe.

Réflexions sur les Equations du second degré à deux indéterminées.

Il résulte évidemment de ce qu'on a vu dans le cours de ce chapitre, que toute équation du second degré à deux indéterminées qui n'est ni absurde ni décomposable en facteurs du premier degré appartient toujours à l'une des trois courbes que nous avons examinées plus haut ; mais cette équation peut s'offrir sous une forme compliquée qui ne permette pas de distinguer immédiatement la courbe qui en est le lieu. Il importe donc d'assigner les caractères auxquels on pourra reconnaître la courbe que construit une équation du second degré entre deux indéterminées et ensuite d'indiquer les moyens par lesquels on pourra l'amener à avoir l'une des formes que nous

avons vu plus haut appartenir aux courbes de ce degré.

Tant que l'équation ne renfermera pas le rectangle des coordonnées, il sera facile de reconnaître la courbe qu'elle peut construire : on pourra, pour y parvenir, s'aider des observations suivantes.

Si l'équation ne renfermant d'autres puissances de x et de y que les deux carrés, ces deux carrés sont positifs dans le même membre, tandis que la quantité toute connue sera positive dans l'autre membre, cette équation appartiendra à une ellipse ayant son centre à l'origine des coordonnées et ses axes principaux dirigés suivant ceux des x et y, et cette ellipse se changera en cercle si les deux carrés ont le même coefficient.

Si les deux carrés y^2 et x^2 passés dans le même membre ont des signes différens et s'il n'y a en même tems d'autres puissances de x et de y que ces carrés, l'équation appartiendra à une hyperbole ayant pour centre l'origine et pour axes les axes coordonnés; et cette hyperbole sera équilatère si les coefficiens des deux carrés sont égaux.

Si l'équation ne renferme que l'un des carrés, et n'a que deux termes dont le second soit le produit de l'autre indéterminée par une quantité connue, elle appartiendra à une parabole qui aura son sommet à l'origine, pour diamètre l'axe sur lequel se mesure la coordonnée qui n'entrera qu'au premier degré, l'autre axe pour tangente, et qui sera toute entière à droite ou à gauche de ce dernier axe, suivant que les deux termes placés dans différens membres auront le même signe ou des signes différens.

Ce que nous venons de dire, pour les deux premiers cas, aura encore lieu si l'équation, outre les carrés des deux indéterminées, renferme aussi leurs premières puissances; seulement les axes auxquels elle se rapportera ne seront plus alors les axes principaux; mais il sera facile

de l'y ramener en faisant évanouir les termes affectés de ces premières puissances par la méthode connue pour faire disparaître le second terme d'une équation.

De même pour le troisième cas, l'indéterminée qui entre déjà dans l'équation par son carré pourrait aussi y entrer par sa première puissance; il pourrait, de plus, s'y trouver des termes tout connus; le lieu de l'équation ne cesserait pas d'être une parabole et par les transformations usitées, on l'amenerait facilement à la forme ordinaire.

Ces remarques ne sont applicables qu'autant que le produit xy ne se trouve pas dans l'équation; mais ce cas, en apparence plus compliqué, peut se ramener aux précédens en changeant la direction des axes pour faire évanouir ce rectangle et en examinant de quelle manière l'équation de condition qui rend nul son coefficient modifie pour le signe les coefficiens des deux carrés.

Soit donc l'équation générale du second degré

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0;$$

si l'on y fait

$$y = u \sin q + t \cos q, \quad x = u \cos q - t \sin q,$$

u et t étant de nouvelles coordonnées rectangulaires qui partent de l'origine des x et y, on aura, en égalant à zéro le coefficient de ut, et en représentant par m et par n les coefficiens de u^2 et de t^2, les trois équations.

$$\text{tang } 2q = \frac{b}{c - a},$$

$$a \sin q^2 + c \cos q^2 + b \sin q \cos q = m$$

$$a \sin q^2 + c \sin q^2 - b \sin q \cos q = n,$$

et

et, d'après ce qu'on a vu plus haut, l'équation du second degré sera celle d'une ellipse, d'une hyperbole ou d'une parabole, suivant que les deux coefficiens m et n seront de même signe, de signe contraire ou que l'un des deux sera nul ; c'est-à-dire, suivant que le produit mn sera positif, négatif ou zéro ; tout se réduit donc à trouver au moyen des coefficiens de l'équation proposée l'expression de ce produit.

Pour l'obtenir facilement, on ajoutera et on retranchera successivement les valeurs de m et de n, ce qui donnera

$$m+n=a+c$$
$$m-n=(c-a)\cos 2q+b\sin 2q,$$

ou plutôt

$$m+n=a+c$$
$$m-n=\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ac},$$

puisque l'équation

$$\text{tang } 2q=\frac{b}{c-a},$$

donne

$$\sin 2q=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ac}}$$

et

$$\cos 2q=\frac{c-a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ac}};$$

formant ensuite le carré de $m+n$ et celui de $m-n$ et les retranchant l'un de l'autre, on trouvera

$$4mn=4ac-b^2.$$

Ainsi, c'est du rapport de grandeur entre les trois coefficiens a, b et c que dépendra la nature de la courbe du second degré, et elle sera une ellipse, une hyperbole ou

une parabole, suivant que $4ac$ sera plus grand, plus petit ou égal à b^2.

Il suit de là qu'aux conditions mentionnées plus haut, on doit encore ajouter les suivantes:

Si des trois termes x^2, xy et y^2, il ne manque que l'un des carrés, l'équation appartient toujours à une hyperbole ou n'exprime aucune courbe; parce que si a ou c est zéro, la quantité $4ac - b^2$, se réduisant à b^2 est essentiellement négative; dans ce cas, la courbe aura pour une de ses asymptotes, l'axe sur lequel se mesure la coordonnée qui n'entre qu'au premier degré, ou du moins une parallèle à cet axe.

Si l'équation n'ayant que deux termes, l'un est le produit des deux indéterminées x et y, et l'autre une quantité toute connue; elle exprime alors une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Enfin, si les deux carrés x^2 et y^2 manquent en même tems dans l'équation générale

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

auquel cas on a une équation de cette forme

$$xy + dy + ex + f = 0,$$

d, e, f pouvant être indifféremment positifs ou négatifs; l'équation appartient encore à une hyperbole rapportée à ses asymptotes, ou plutôt à des parallèles aux asymptotes, puisque les abscisses et les ordonnées ne sont pas comptées du centre. Pour les y ramener, on posera

$$x = x' - d,\ y = y' - e,$$

c'est-à-dire, qu'on mènera parallèlement à l'axe des y et dans le sens indiqué par le signe de d une droite qui soit

distante de cet axe de la quantité d, et parallèlement à l'axe des x une autre droite qui en soit éloignée de la quantité e. Ces deux droites seront les asymptotes, x' et y' les nouvelles coordonnées prises du centre, et l'équation prendra cette forme

$$x'y' = de - f.$$

Pour éclaircir ce qui précède par quelques exemples, proposons-nous d'abord de trouver la courbe dont l'équation serait,

$$(x-y)^2 + 3(x+y)^2 = 1.$$

En développant cette équation, il vient,

$$x^2 + xy + y^2 = \tfrac{1}{4}$$

et parce que la quantité $4ac - b^2$ est ici égale à $+3$, la courbe demandée est une ellipse, et il ne faut plus que la construire.

Pour y parvenir, on remarquera d'abord que l'équation

$$x^2 + xy + y^2 = \tfrac{1}{4},$$

étant symétrique, par rapport à x et à y, il en résulte que tout ce que l'on dira sur la marche des ordonnées s'appliquera aussi à celle des abscisses. Or, si l'on fait

$$x = 0,$$

on aura

$$y = \pm\tfrac{1}{2};$$

ainsi, les quatre points E, E', e, e' (*fig.* 26), déterminés, en portant sur deux droites perpendiculaires entr'elles, et à partir du point O de leur intersection, les distances OE, OE', Oe, Oe' égales à $\frac{1}{2}$, appartiendront déjà à la courbe cherchée. Si de plus on résout par rapport à y l'équation

$$x^2+y^2+xy=\tfrac{1}{4},$$

on aura $$y=-\frac{x\pm\sqrt{1-3x^2}}{2}.$$

Or, ces valeurs de y ne peuvent être réelles qu'autant que l'on aura

$$3x^2<1,$$

ou $$x<\pm\frac{1}{\sqrt{3}};$$

si donc ayant pris OK et OG égaux à $\frac{1}{\sqrt{3}}$, on élève les perpendiculaires KQ et GP, elles seront dans le sens des x les limites de la courbe. On aura pareillement ses limites dans le sens des y, en menant PQ et RS à la distance $\frac{1}{\sqrt{3}}$ de l'axe des x, ensorte qu'elle sera toute entière comprise dans le carré $PQRS$. Pour trouver les points où elle touche chacun des côtés de ce carré, on fera $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ dans les valeurs de y, ce qui donnera

$$y=\mp\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

pour les ordonnées des points où elle touche les lignes PR et QS; on aura de même

$$x=\mp\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

pour les abscisses des points où elle touche les droites PQ et RS, ensorte qu'on aura quatre autres points de sa direction en divisant en deux parties égales les quatre

distances KQ, NQ, GR et RI aux points L, M, F et H.

On pourrait encore déterminer d'autres points et les multiplier assez, pour qu'un trait qui les joindrait représentât avec une exactitude suffisante la courbe proposée; mais comme elle sera plus facile à décrire lorsqu'on connaîtra ses axes principaux, nous allons nous proposer maintenant de la rapporter à ces lignes.

Pour y parvenir, on mettra, au lieu de x et de y dans l'équation proposée les valeurs

$$u\cos q - t\sin q$$

$$u\sin q + t\cos q,$$

qui servent à passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système de coordonnées semblables, et l'on aura pour transformée

$$(1+\cos q\sin q)u^2+(1-\cos q\sin q)t^2+(\cos q^2-\sin q^2)ut=\tfrac{1}{4}.$$

Pour que les axes des u et des t soient les axes principaux, il faut que l'on ait

$$\cos q^2 - \sin q^2 = 0 \text{ ou } \cos q = \sin q,$$

et par conséquent $q = 50°$; d'où il suit que les axes de l'ellipse que nous considérons, sont dirigés suivant les diagonales du carré $PQRS$.

En second lieu, comme de $\cos q = \sin q$, on tire que $\cos q$ et $\sin q$ sont tous deux égaux à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, on aura pour l'équation par rapport à ces axes

$$\tfrac{3}{2}u^2+\tfrac{1}{2}t^2=\tfrac{1}{4} \text{ ou } 3u^2+t^2=\tfrac{1}{2}.$$

Soit pour second exemple l'équation

$$y^2 + ay = x^2 + bx,$$

dans laquelle on suppose $a > b$. En lui appliquant ce que nous avons dit plus haut, on voit évidemment qu'elle appartient à une hyperbole équilatère, mais qui n'est pas ici rapportée à ses axes principaux. Nous verrons tout-à-l'heure comment on peut l'y ramener : proposons-nous d'abord de la construire d'après son équation.

Soient donc AX et AY (*fig* 27), deux axes perpendiculaires entr'eux. Pour déterminer d'abord les points de la courbe qui se trouvent sur ces axes, on fera successivement $x = 0$ et $y = 0$. Or, à la première hypothèse correspondent deux valeurs de y, $y = 0$, et $y = -a$; à la seconde correspondent deux valeurs de x, $x = 0$, $x = -b$; ainsi le point A d'intersection des deux axes sera déjà un des points de la courbe : on en aura encore deux autres en prenant sur l'axe des x, $AB = -b$, et sur l'axe des y, $AA' = -a$; enfin, elle passera encore par le point B' déterminé en élevant au point A' la perpendiculaire $A'B' = -b$, car l'équation

$$y^2 + ay = x^2 + bx$$

se vérifie évidemment, lorsqu'on y met $-b$ pour x, et $-a$ pour y. En résolvant ensuite cette équation par rapport à l'indéterminée x, on aura

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4y^2 + 4ay}}{2};$$

or, il est clair que les deux valeurs de x que donne ce résultat pour une même valeur de y sont toujours réelles, si celle de y est positive ; qu'en même tems elles sont toujours de signe contraire, et telles que celle qui est négative, est constamment la plus grande ; ainsi la courbe s'é-

tendra indéfiniment au-dessus de AX, mais de manière que sa partie la plus considérable sera dans le sens des x négatifs.

Mais si y est négatif, ces valeurs de x deviennent

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4y^2 - 4ay}}{2};$$

et ne peuvent être réelles qu'autant que l'on a $b^2 + 4y^2$ égal, ou plus grand que $4ay$, c'est-à-dire,

$$y = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{2}, \text{ ou } y > \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{2};$$

dans le premier cas, il ne correspondra aux deux valeurs de y qu'une même valeur de $x = -\frac{b}{2}$; dans le second, aux deux valeurs de y il correspondra deux valeurs de x différentes de grandeur et de signe, et telles que la valeur négative l'emportera constamment sur la valeur positive.

Il résulte de-là, que si ayant mené du point B la tangente BE au cercle décrit du point B' comme centre avec un rayon b, on porte la moitié de cette tangente qui sera $\sqrt{a^2 - b^2}$ du milieu D de AA', aux points F et F', les perpendiculaires FC, $F'C'$ élevées à ces points sur AY, détermineront par leur rencontre avec la droite PP' menée parallèlement à AY et à la distance $\frac{b}{2}$, des points C et C' qui appartiendront à l'hyperbole; le premier sera le sommet de la branche supérieure ACB, le second sera le sommet de la branche inférieure $A'C'B'$.

Les sommets ainsi déterminés, il est facile de reconnaître que les diamètres principaux sont les droites PP' et DO, et que le point O de leur intersection est le

centre de la courbe ; ce qui suit aussi de l'équation proposée, puisque pour l'amener à sa forme ordinaire il faudrait poser

$$x = x' - \frac{b}{2}, \qquad y = y' - \frac{a}{2},$$

ce qui donnerait

$$y'^2 - x'^2 = \frac{a^2 - b^2}{4},$$

x' et y' étant de nouvelles coordonnées rectangulaires prises du centre.

Si l'on voulait déterminer les points où la courbe proposée est rencontrée par la droite dont l'équation est

$$y = \frac{a}{b}x,$$

il faudrait éliminer x et y entre cette équation et l'équation

$$y^2 + ay = x^2 + bx,$$

ce qui donnerait

$$x = 0,\ y = 0 \text{ et } x = -b,\ y = -a,$$

ainsi la droite rencontrerait la courbe aux points A et B', et passerait par conséquent par le point O, ce qui suit d'ailleurs de son équation, puisqu'elle se vérifie pour les valeurs

$$x = -\frac{b}{2}, \qquad y = -\frac{a}{2}.$$

Si cette droite faisait avec l'axe des x un angle de 50°, son équation serait

$$y = x,$$

et cette valeur de y, mise dans l'équation de la courbe,

ne pourrait y satisfaire qu'autant que l'on aurait

$$a = b;$$

or, en introduisant cette supposition dans l'équation

$$y^2 + ay = x^2 + bx,$$

elle devient

$$y^2 + ay = x^2 + ax,$$

et donne un résultat identique

$$0 = 0,$$

lorsqu'on y fait

$$y = x.$$

Pour expliquer ce résultat, on remarquera que l'équation

$$y^2 + ay = x^2 + ax,$$

pouvant être mise sous cette forme

$$y^2 - x^2 + ay - ax = 0,$$

ou

$$(y - x)(y + x + a) = 0,$$

n'appartient plus alors à une courbe du second degré, mais au système de deux lignes droites, dont l'une qui a pour équation

$$y = x,$$

passe par les points A et O (*fig.* 28), et dont l'autre qui a pour équation

$$y = -x - a,$$

est une perpendiculaire au point O de la précédente.

Pour second exemple du genre hyperbolique prenons l'équation

$$2xy + y^2 = 1$$

et soient AX et AY (*fig.* 29) les axes rectangulaires auxquels elle se rapporte.

Pour $y = 0$, on a $x = \infty$, ainsi l'axe des x est une des asymptotes de l'hyperbole proposée ; en faisant ensuite $x = 0$, ou a $y = \pm 1$, ainsi deux points de la courbe sont placés sur l'axe des y, l'un au-dessous, l'autre au-dessus de l'axe des x, et tous deux à l'unité de distance.

En résolvant maintenant l'équation par rapport à y, il vient

$$y = -x \pm \sqrt{1 + x^2};$$

ainsi l'on construira la double ordonnée qui répond à chaque abscisse positive AP en portant l'hypothénuse $BP = \sqrt{1 + x^2}$ de l'un et de l'autre côté du point P ; $AE = PE - AP = \sqrt{1 + x^2} - x$ sera l'ordonnée positive PM, et $AD = PD + AP = \sqrt{1 + x^2} + x$ sera l'ordonnée négative PM'.

A cette première remarque déjà propre à construire la courbe, on pourra encore joindre les suivantes qui sont des conséquences immédiates de la forme de son équation.

La différence $-x + \sqrt{1 + x^2}$ est d'autant plus petite que x est plus grand, sans pouvoir jamais s'anéantir ; la somme $x + \sqrt{1 + x^2}$ augmente au contraire en même tems que x ; ainsi, la branche de courbe placée au-dessus de l'axe des abscisses en approche de plus en plus sans pouvoir jamais le rencontrer, tandis que la branche qui est au-dessus du même axe s'en éloigne de plus en plus : ces circonstances se reproduisent, mais en sens contraire, lorqu'on passe du côté des x négatifs, puisque, pour une abscisse négative $-x$, les valeurs de y ont la grandeur qu'elles auraient pour la même abscisse prise positivement, et se présentent seulement dans un ordre inverse.

Occupons-nous maintenant de ramener aux formes pré-

cédemment trouvées pour l'hyperbole l'équation proposée, et, pour y parvenir, bornons-nous à changer la direction des axes, en conservant l'origine qui est déjà placée au centre de la courbe, puisque $-x$ et $-y$ mis en même tems dans son équation, n'y apportent aucun changement.

On fera donc seulement dans cette équation

$$x = u\cos q + t\cos p$$

$$y = u\sin q + t\sin p,$$

et la transformée

$$\left.\begin{matrix}2\sin q\cos q\\ +\sin q^2\end{matrix}\right\}u^2 \left.\begin{matrix}+2\sin p\cos p\\ +\sin p^2\end{matrix}\right\}t^2 \left.\begin{matrix}+2\sin p\cos q\\ +2\cos p\sin q\\ +2\sin p\sin q\end{matrix}\right\}ut = 1$$

sera, par rapport à deux diamètres quelconques, l'équation de l'hyperbole proposée.

Ces diamètres seront les asymptotes, si les termes affectés de u^2 et de t^2 disparaissent, c'est-à-dire, si l'on a les deux équations

$$2\sin q\cos q + \sin q^2 = 0,$$

$$2\sin p\cos p + \sin p^2 = 0.$$

On tire de la première

$$\sin q = 0 \text{ et par conséquent } \cos q = 1,$$

c'est-à-dire, que l'une des asymptotes se confond avec l'axe des x; dès-lors, la seconde équation ne peut pas être satisfaite par l'égalité à zéro du facteur $\sin p$, et elle se réduit à

$$2\cos p + \sin p = 0,$$

qui donne

$$\text{tang}\, p = -2,$$

et détermine ainsi la direction de la seconde asymptote.

La transformée se réduit en même tems à

$$2 \sin p \,.\, ut = 1,$$

et, en mettant pour $\sin p$ la valeur $\frac{2}{\sqrt{5}}$ que donne l'équation $\text{tang}\, p = -2$, on trouve enfin

$$ut = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

pour l'équation de l'hyperbole en question rapportée à ses asymptotes comme axes coordonnés.

Elle sera rapportée à deux diamètres conjugués quelconques, si, au lieu de faire nuls les coefficiens des deux carrés, on écrit

$$\sin p \cos q + \cos p \sin q + \sin p \sin q = 0,$$

et ces diamètres deviendront les axes principaux si, à cette première équation, on ajoute cette autre

$$p - q = 100^{g},$$

ou les relations

$$\sin p = \cos q, \qquad \cos p = -\sin q$$

qui s'ensuivent.

Par la substitution de ces valeurs, la première équation deviendra

$$\cos q^2 - \sin q^2 + \sin q \cos q = 0,$$

ou

$$\text{tang}\, q^2 - \text{tang}\, q = 1$$

et donnera

$$\text{tang}\, q = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

et par conséquent

$$\sin q = -\cos p = \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$\cos q = \sin p = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}};$$

lesquelles valeurs étant mises à leur tour dans l'équation

$$\left.\begin{matrix} 2\sin q\cos q \\ +\sin q^2 \end{matrix}\right\} u^2 + \left.\begin{matrix} 2\sin p\ \cos p \\ +\sin p^2 \end{matrix}\right\} t^2 = 1,$$

à laquelle l'équation générale se trouve alors réduite, donneront pour l'équation aux axes de l'hyperbole proposée

$$\frac{10+6\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}u^2 - \frac{4\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}t^2 = 1$$

ou

$$(3+\sqrt{5})u^2 - 2t^2 = 1+\sqrt{5},$$

en chassant les dénominateurs et divisant par le facteur commun $2\sqrt{5}$.

u et t égalés successivement à zéro dans cette équation donneront les longueurs des demi-axes; ainsi tout sera connu dans ce système, puisque ces axes doivent passer par l'origine des x et y, et que leur direction par rapport à ces coordonnées primitives est fixée par les équations :

$$p - q = 100^\circ,\ \text{tang}\, q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Proposons-nous pour autre exemple l'équation

$$y^2 - 2xy + x^2 - x = 0.$$

On a ici $a=1$, $b=-2$, $c=1$, et par conséquent $b^2-4ac=0$, ainsi la courbe demandée est une parabole ; en second lieu cette parabole passe par l'origine des coordonnées, puisque pour $x=0$ on a $y=0$, et enfin elle est toute entière à droite de l'axe des y, puisque l'équation donnée pouvant s'écrire ainsi

$$y-x=\pm\sqrt{x},$$

fait voir qu'on ne peut attribuer à x aucune valeur négative.

La même équation résolue par rapport à x, donne

$$x=\frac{2y+1\pm\sqrt{4y+1}}{2},$$

et montre évidemment qu'il correspondra deux valeurs réelles de l'abscisse à chaque valeur positive de l'ordonnée, mais que les valeurs de x cesseront d'être réelles, lorsque l'ordonnée devenant négative sera plus grande que $\frac{1}{4}$: à ce maximum des ordonnées négatives repondra une abscisse $=+\frac{1}{4}$; la courbe passera donc par le point dont les coordonnées sont $x=+\frac{1}{4}$ et $y=-\frac{1}{4}$, aura pour tangente la parallèle menée par ce point à l'axe des x, et sera toute entière au-dessus de cette parallèle.

De nouvelles valeurs données à x dans l'équation

$$y-x=\pm\sqrt{x},$$

ou à y dans l'équation

$$x=\frac{2y+1\pm\sqrt{4y+1}}{2}:$$

conduiraient facilement à la description de la courbe ; mais on y parviendra plus aisément encore par la substitution des valeurs

$$u\cos q-t\sin q+a$$
$$u\sin q+t\cos q+b,$$

aux coordonnées x et y, dans la première de ces deux équations.

On a de cette manière :

$$\left.\begin{array}{r}(\sin q - \cos q)^2 u^2 + (\sin q + \cos q)^2 t^2 \\ + 2(\sin q^2 - \cos q^2) ut \\ + \{2(b-a)(\sin q - \cos q) - \cos q\} u \\ + \{2(b-a)(\sin q + \cos q) + \sin q\} t^2 \\ + (b-a)^2 - a\end{array}\right\} = 0,$$

et il faut, pour arriver à la forme ordinaire de l'équation de la parabole, égaler à zéro les coefficiens de u^2, ut, t et le terme constant, c'est-à-dire poser les égalités :

$$\sin q = \cos q$$
$$4(b-a) + 1 = 0$$
$$(b-a)^2 - a = 0,$$

ce qui réduit la transformée à

$$\left.\begin{array}{r}(\sin q + \cos q)^2 t^2 \\ + \{2(b-a)(\sin q - \cos q) - \cos q\} u\end{array}\right\} = 0,$$

dans laquelle il ne faut plus que mettre pour $\sin q$, $\cos q$, a et b leurs valeurs.

Or, les équations posées plus haut donnent

$$q = 50°, \quad \sin q = \cos q = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$a = \tfrac{1}{16}, \qquad b = -\tfrac{3}{16},$$

ainsi la parabole proposée aura pour sommet le point dont les coordonnées sont $\frac{1}{16}$ et $-\frac{3}{16}$ par rapport aux axes primitifs des x et des y; son diamètre principal coupera l'axe primitif des x sous un angle de 50°, et son équation par

rapport à ce diamètre et à la tangente à son sommet, sera

$$t^2 = \frac{1}{\sqrt{8}}\, u.$$

Enfin, pour dernier exemple, soit encore l'équation

$$x^2 + ay - bx = 0,$$

et déterminons, par rapport à deux droites connues AX et AY (*fig.* 30) supposées rectangulaires, la position de la parabole qui en est le lieu géométrique.

On fera d'abord $y = 0$, ce qui donnera

$$x = 0 \text{ et } x = b;$$

ainsi la courbe passe par l'origine des coordonnées, et on aura encore un autre de ses points en prenant sur l'axe des x, $AM = b$.

En résolvant ensuite l'équation par rapport à x, on aura

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ay}}{2},$$

et comme ces valeurs ne peuvent être réelles pour les valeurs positives de y, qu'autant que ces dernières sont égales ou plus petites que $\frac{b^2}{4a}$, le point le plus élevé de la courbe se trouvera nécessairement sur la droite BA' menée parallèlement à l'axe des x, et à une distance de cet axe $= \frac{b^2}{4a}$. Pour achever de déterminer ce point, on fera $y = \frac{b^2}{4a}$ dans l'expression générale des valeurs de x, ce qui donnera $x = \frac{b}{2}$,

et indique par conséquent qu'il est en A à l'intersection de la droite BA' avec la perpendiculaire élevée sur le milieu de A.

Ainsi la parabole proposée aura son sommet en A, et passera par les points A et M. Il suit évidemment de là qu'elle va s'étendre à l'infini au-dessous de la droite AX, et c'est ce qu'indique aussi l'équation proposée, puisque les valeurs de x qu'elle donne pour une même valeur, négative de y sont constamment réelles, quelle que soit la grandeur de cette coordonnée.

Enfin, si l'on veut ramener l'équation

$$x^2 + ay - bx = 0,$$

à la forme ordinaire de l'équation de la parabole, il suffira d'y mettre $x' + \alpha$ pour x, $y' + \mathfrak{C}$ pour y, et de déterminer α et $\mathfrak{C}$ par la condition que le coefficient de x dans la transformée, et le terme tout connu soient nuls, ce qui donnera

$$\alpha = \frac{b}{2}, \qquad \mathfrak{C} = \frac{b^2}{4a},$$

et réduira l'équation à

$$x'^2 + ay' = 0,$$

dans laquelle les coordonnées y' se mesurent sur la perpendiculaire $A'P$ et à partir du sommet A'.

Nous n'ajouterons rien à ces exemples, qui, avec les réflexions qui précèdent, suffisent pour faire connaître la manière dont on doit s'y prendre, et les considérations que l'on doit employer pour résoudre tous les problèmes de cette espèce.

Des courbes du second degré considérées dans le cône.

Les courbes que nous venons d'examiner sont aussi celles que l'on obtient en coupant par un plan quelconque une surface conique à base circulaire; voici comment on peut constater cette identité.

Rappelons-nous d'abord que la surface en question est engendrée par une droite indéfinie qui, étant assujétie à passer toujours par un point donné, se meut de manière qu'elle s'appuie constamment sur une circonférence donnée qui la dirige dans son mouvement; il suit de là qu'elle est formée de deux nappes qui, toutes deux partant du point donné, s'étendent à l'infini en embrassant un espace de plus en plus grand à mesure qu'elles s'écartent de leur origine, et le point donné se nomme centre de la surface conique, parce que si l'on conçoit deux plans placés à égale distance de ce point et parallèlement entr'eux, la partie de la génératrice, dans l'une quelconque de ses positions comprise entre ces deux plans, sera divisée à ce centre en deux parties égales.

Cela posé, soient SAB (*fig.* 31), une surface conique à base circulaire, S son centre, $ACBD$ la circonférence de cercle qui dirige le mouvement de la génératrice SA, et O le centre de cette circonférence.

Si d'abord, par le centre de la surface conique et par celui de sa base, on mène un plan, il rencontrera les deux nappes de la surface, et déterminera pour intersections deux triangles SCD, Scd opposés par le sommet, puisque les lignes SC, SD ne seront autre chose que deux positions de la génératrice.

Si, ensuite, on mène le plan coupant parallèlement à la

base $ACBD$, il ne rencontrera que la nappe inférieure, son intersection avec cette nappe sera une courbe fermée $A'C'B'D'$, et cette courbe sera une nouvelle circonférence de cercle, puisque les lignes $A'O'$ et $C'O'$ devant, à cause des triangles semblables AOS et $A'O'S$, COS et $C'O'S$, être dans le même rapport que les lignes égales AO et CO seront aussi égales entr'elles.

Maintenant, si l'on conçoit que le plan coupant tournant autour de la ligne $C'D'$ comme charnière, passe de cette dernière position à la précédente, la courbe d'intersection s'éloignera de plus en plus de la circonférence de cercle pour se rapprocher du triangle ; et d'abord, tant que le plan coupant fera avec la génératrice SA un angle moindre que 200 degrés, il ne rencontrera toujours que la nappe inférieure, l'intersection sera toujours une courbe fermée et de plus en plus alongée. Arrivé à 200 degrés, et par conséquent parallèle à la génératrice, elle ne rencontrera encore que la nappe inférieure, mais l'intersection cessera d'être une courbe fermée, et elle se dessinera sur la surface conique en s'élargissant avec elle. Au-delà de 200 degrés, le plan coupant rencontrera les deux nappes, formera dans chacune d'elles une intersection, et ces deux intersections séparées par un intervalle qui sera d'autant plus grand que le plan sera plus éloigné du centre du cône s'étendront à l'infini chacune dans le sens de la nappe sur laquelle elle se trouvera décrite.

Il est déjà facile de reconnaître une grande analogie entre ces différentes intersections et les courbes précédemment examinées, la simple considération des triangles semblables que nous offre la figure, va nous démontrer qu'on a l'ellipse dans le premier cas, la parabole dans le second et l'hyperbole dans le troisième.

Soient en effet, $IMI'm$ la courbe d'intersection dans le

premier cas, et GH la trace du plan coupant sur le plan de la base; concevons que la position du triangle par l'axe SAB soit ménagée de manière que sa trace AB, sur le plan de la base, soit perpendiculaire à GH; soient maintenant $FMEm$, $F'M'E'm'$ deux plans menés parallèlement à la base $ACBD$, et donnant par conséquent pour intersections des circonférences de cercle; FE et $F'E'$ seront les intersections des plans de ces cercles avec celui du triangle par l'axe; Mm et $M'm'$ seront les intersections des mêmes cercles par le plan coupant, et parce que les lignes AG et GH sont perpendiculaires entr'elles, leurs parallèles FE et Mm, $F'E'$ et $M'm'$ seront aussi à angle droit.

Cela posé, les triangles semblables IPE et $II'S$, $I'PF$ et $I'P'F'$, donnent

$$IP : IP' :: PE : P'E'$$
$$I'P : I'P' :: PF : P'F',$$

et en multipliant par ordre

$$IP \times I'P : IP' \times I'P' :: PE \times PF : P'E' \times P'F';$$

mais par la propriété du cercle, les produits $PE \times PF$, $P'E' \times P'F'$ sont respectivement égaux aux carrés des ordonnées MP et $M'P'$, ainsi, on aura

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 :: IP \times I'P : IP' \times I'P',$$

c'est-à-dire que les carrés des ordonnées à la courbe $IMI'm$ sont proportionnels aux rectangles des abscisses correspondantes, ou aux produits des distances du pied des ordonnées à chacun des sommets de la courbe, ces ordonnées tombant entre les deux sommets; et c'est là, comme on l'a vu page 77, une propriété qui appartient exclusivement à l'ellipse.

Si le triangle SII' était semblable au triangle SAB,

sans que la ligne II' fût parallèle à AB, ce qui aurait lieu si l'angle SII' était égal à SAB et $SI'I$ à SBA, alors les triangles EPI et $FI'P$ étant semblables entr'eux comme les précédens, donneraient

$$EP \times PF = IP \times I'P,$$

et par suite

$$\overline{PM}^2 = IP \times I'P,$$

à cause de

$$\overline{PM}^2 = EP \times PF.$$

La section $IMI'm$ serait donc alors une ellipse rapportée à ses diamètres conjugués égaux, ou même un cercle si les ordonnées PM étaient perpendiculaires au diamètre II', et cette circonstance aura lieu si la trace GH du plan coupant sur la base du cône est en même tems perpendiculaire sur la droite GA; et sur la droite GI, c'est-à-dire si elle est perpendiculaire au triangle SAB mené par l'axe, et si par conséquent celui-ci est lui-même perpendiculaire au plan de la base du cône et au plan coupant.

Passons maintenant à la figure 33 où le plan coupant rencontre à la fois les deux nappes du cône; concevons le triangle par l'axe déterminé comme dans le cas précédent, un plan parallèle à la base donnant pour intersection le cercle EMF, et les ordonnées PM et $P'M'$ obliques par rapport aux abscisses IP, IP' de la courbe $M'Im'$, mais perpendiculaires aux abscisses PE et PF, $P'A$ et $P'B$ des deux cercles $AM'B$, EMF.

Les triangles semblables $PI'F$ et $P'I'B$, EIP et AIP' donneront

$$I'P : I'P' :: PF : P'B$$
$$IP : IP' :: PE : AP',$$

et par conséquent

$$I'P \times IP : I'P' \times IP' :: PF \times PE : P'B \times AP',$$

mais on a d'ailleurs

$$PF \times PE = \overline{PM}^2, \; P'B \times AP' = \overline{P'M'}^2,$$

on en conclura donc

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 :: I'P \times IP : I'P' \times IP',$$

c'est la propriété connue de l'hyperbole.

Enfin si l'on considère la figure 34 où le plan est supposé parallèle à l'arrête du cône, tout le reste étant d'ailleurs mené comme ci-dessus, on aura

$$PF = PB,$$

$$IP : IP' :: EP' : AP',$$

par suite

$$IP : IP' :: EP \times PF : AP' \times P'B,$$

et par conséquent

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 :: IP : IP',$$

propriété qui caractérise la parabole.

De la manière de trouver les courbes du second degré par la connaissance de quelques propriétés.

On peut, en partant des propriétés que nous avons vu caractériser les courbes du second degré, parvenir directement à leurs équations; les problèmes suivans en fourniront des exemples.

Premier problème. Trouver la courbe pour chaque point M de laquelle les droites MA et MB menées de ce point à deux points fixes A et B font avec la droite AB qui les joint des angles MAB, MBA complément l'un de l'autre.

Prenons la droite AB pour l'axe des x et son milieu C pour l'origine des coordonnées; nommons x et y les coordonnées du point M, et $2a$ la distance des deux points fixes, on aura :

$$\text{tang } MAB = \frac{y}{x+a},$$

$$\text{tang } MBA = \frac{y}{x-a},$$

et par conséquent, pour l'équation de la courbe demandée

$$\frac{y^2}{x^2-a^2} \pm 1 = 0$$

le signe $+$ répondant au cas où c'est la somme des deux angles qui doit être égale à un angle droit, et le signe $-$ à celui où c'est la différence.

On tire de cette équation

$$y^2 \pm x^2 = \pm a^2$$

et en la rapportant aux modèles précédemment trouvés, il est clair que la courbe demandée est un cercle dans le premier cas et une hyperbole équilatère dans le second.

Second problème. On demande la courbe dont la somme des distances à deux points fixes connus de position, est par-tout égale à une ligne donnée $2a$.

Soient F et f (*fig.* 24) les deux points fixes. Prenons la droite qui les joint pour l'axe des x, et le milieu C de cette droite pour l'origine des coordonnées. Portons en-

suite sur l'axe Ff et de chaque côté du centre des quantités CA, CB, $= a$, et après avoir désigné par c et $-c$ les abscisses des points fixes, désignons par x et y les coordonnées d'un point quelconque M.

Cela posé, si ce point M appartient à la courbe, on aura

$$FM + fM = AB,$$

ou

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a.$$

En posant

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = z,$$

cette équation deviendra

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + z = 2a,$$

et on en tirera

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4az + z^2,$$

ou en mettant pour z^2 sa valeur, et réduisant

$$a^2 + cx - az = 0,$$

et par conséquent

$$z = \frac{a^2 + cx}{a}.$$

Cette valeur substituée dans l'équation

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = z,$$

donnera

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = \frac{a^4 + 2a^2cx + c^2x^2}{a^2},$$

et par conséquent pour l'équation de la courbe cherchée,

$$(a^2 - c^2)(x^2 - a^2) + a^2 y^2 = 0.$$

Si a est plus grand que c, c'est-à-dire, si la distance des deux points fixes est moindre que $2a$, cette équation du second degré appartiendra à une ellipse, et en particulier à un cercle, si $c = 0$; elle appartiendra à une hyperbole; si au contraire a est moindre que c, c'est-à-dire, si la distance des points fixes est plus grande que la ligne donnée $2a$; et enfin elle appartiendra à la droite Ff même, si a est égal à c.

Troisième problème. Trouver la courbe dont chaque point est autant éloigné d'une droite connue de position que d'un point fixe également connu de position.

Soient AC (*fig.* 25) la droite donnée et F le point fixe. Il est clair que si de ce point on abaisse sur AC la perpendiculaire AF, le milieu B de la distance AF sera déjà un des points de la courbe cherchée. Soient ce point l'origine des coordonnées, AF l'axe des x, et désignons par c l'abscisse BF du point fixe, et par x et y les coordonnées d'un point quelconque M.

On aura d'une part

$$FM = \sqrt{y^2 + (c - x)^2},$$

d'autre part $$QM = x + c,$$

et comme ces deux distances doivent être égales, si le point M appartient à la courbe cherchée, on aura pour son équation,

$$y^2 + (c - x)^2 = (x + c)^2,$$

ou $$y^2 = (x + c)^2 - (x - c)^2,$$

c'est-à-dire $$y^2 = 4cx,$$

équation d'une parabole dont le paramètre est $4c$.

Quatrième problème. Trouver la courbe telle que si de deux points fixes, on mène des droites à chacun de ses points, ces droites font des angles égaux avec la tangente au même point.

En conservant les mêmes dénominations que dans le problème premier, soient de plus MR (*fig.* 25) la direction de la normale au point M, et α l'abscisse du point R, il suit évidemment de l'énoncé du problème, que la droite MR doit diviser l'angle FMf en deux parties égales; ensorte qu'on aura

$$FR : FM :: fR : fM,$$

ou $$Ff : FM + fM :: FR : FM,$$

c'est-à-dire,

$$ac : \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} :: c-\alpha : \sqrt{(x-c^2)+y^2}$$

On tire de cette proportion, en faisant le produit des extrêmes égal au produit des moyens et réduisant

$$\frac{c+\alpha}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}} = \frac{c-\alpha}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}$$

équation qui ne renferme plus d'autre inconnue que α.

Or, la distance $CR = \alpha$ est l'abscisse du point où la normale vient rencontrer l'axe des x, c'est-à-dire, la valeur de x' qui dans l'équation générale de la normale,

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x) \ (*),$$

correspond à $y' = 0$, on aura donc

(*) x' et y' dans cette équation représentent les coordonnées d'un point quelconque de la normale, et x et y les coordonnées du point de contact.

$$a = \frac{x\,dx + y\,dy}{dx},$$

et pour l'équation différentielle de la courbe cherchée,

$$\frac{(x+c)\,dx + y\,dy}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}} + \frac{(x-c)\,dx + y\,dy}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} = 0.$$

Des deux termes qui forment le premier membre de cette équation, le premier a évidemment pour intégrale $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, et le second $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$; on aura donc en intégrant $\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} =$ constante.

Ainsi, pour la courbe cherchée, la somme des deux distances FM et fM, ou leur différence, à cause de l'ambiguité du radical, est une quantité constante, propriété qui caractérise l'ellipse et l'hyperbole qui ont leur centre au point C, et la droite qui joint les points fixes F et f.

On pourrait aussi se proposer de trouver la courbe telle que la tangente d'un point quelconque coupe sur les perpendiculaires élevées en deux points donnés de l'axe des x des parties dont le produit est constamment le même, mais on trouvera la solution complète de ce problème dans le numéro 122 de *la théorie des fonctions analytiques*.

FIN.

TABLE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Manière de déterminer la position d'un point sur un plan. page 1
De l'équation d'une ligne. 3
Pour trouver les points de rencontre de deux lignes qui se coupent, il faut supposer que les coordonnées de l'une sont les mêmes que celles de l'autre. 4
Pour trouver les points où une ligne rencontre l'un des axes coordonnés, il faut supposer nulle dans l'équation de cette ligne la coordonnée qui se mesure parallèlement à l'autre axe. *ibid.*

CHAPITRE PREMIER.

Equation de la ligne droite. 5
Examen des différentes circonstances du cours de la ligne droite d'après son équation. 6
Construction de la ligne droite d'après son équation. 7
Equation d'une droite qui passe par deux points donnés. 9
Expression de la distance de ces deux points. 10
Expression de la tangente de l'angle que deux droites forment entr'elles. 11
Les angles que forment entr'elles les directions de trois lignes droites quelconques tracées dans un même plan, sont tels, que chacun d'eux est toujours égal ou à la somme des deux autres, ou à leur différence, ou à la somme de leurs supplémens. *ibid.*
Condition pour que deux droites soient parallèles. 12
——— pour qu'elles fassent un angle droit. *ibid.*
——— pour qu'elles fassent un angle demi-droit. *ibid.*
——— pour qu'elles fassent un angle dont la tangente soit *m*. *ibid.*
Equation de la parallèle menée par un point donné à une ligne donnée. 13
——— de la perpendiculaire abaissée d'un point donné sur une ligne donnée. *ibid.*
——— de la droite menée par un point donné, de manière à en couper une autre sous un angle demi-droit. *ibid.*

—— de la droite menée par un point donné, de manière à en couper une autre sous un angle dont la tangente soit m. *ibid.*
Expression générale de la distance du point donné au point de rencontre et applications à différens cas particuliers. 15
Equation qui donne la tangente trigonométrique de l'angle que doit faire avec l'axe des x la ligne qui divise l'angle de deux droites en deux parties égales. 16
Construction graphique qu'elle fournit pour résoudre le problême de la bissection de l'angle. 18
Application à un problême. 19
Application des différentes formes sous lesquelles peut se présenter l'équation de la ligne droite à la résolution de quelques problêmes. 20
Les trois lignes menées par le sommet de chaque angle d'un triangle et par le milieu du côté opposé se croisent toutes en un même point. 21
Les perpendiculaires élevées sur les milieux des trois côtés d'un triangle se coupent au centre du cercle circonscrit. 22
Les trois perpendiculaires menées des angles d'un triangle sur les côtés opposés, se croisent toutes en un même point. 24
Les trois points de rencontre dont il est question dans les trois théorêmes précédens sont, dans tous triangles placés sur une même ligne droite. *ibid.*
Solution analytique et graphique du problême d'inscrire un carré dans un triangle. 25
Solution analytique et graphique du problême de mener par un point donné dans l'angle de deux droites, une troisième droite terminée aux deux côtés de l'angle et dont ce point soit le milieu. 27

CHAPITRE SECOND.

Equation générale de la circonférence de cercle. 30
Il en résulte que trois conditions non identiques comme trois points non en ligne droite, déterminent de grandeur et de position une circonférence de cercle. *ibid.*
Différentes formes que peut prendre l'équation de la circonférence de cercle. 31
La plus simple est l'équation $x^2 + y^2 = r^2$, les coordonnées sont alors rectangulaires et leur origine est au centre. *ibid.*
Lorsque les axes étant rectangulaires, l'origine est un point de la courbe et qu'un des axes passe par le centre, l'équation du cercle est de la forme $x^2 + y^2 - 2rx = 0$; on en tire immédiatement différentes propositions. 32
Une perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur un

diamètre, est moyenne proportionnelle entre les parties de ce diamètre. *ibid.*
La corde qui joint le sommet de cette perpendiculaire avec l'extrémité du diamètre, est moyenne proportionnelle entre le diamètre entier et le segment qui lui correspond. *ibid.*
Un angle à la circonférence est droit quand ses côtés passent par les extrémités du diamètre. 33
Combinaison de l'équation de la circonférence du cercle avec l'équation de la ligne droite. *ibid.*
Les circonférences concentriques sont par-tout également distantes. 34
Si l'on mène une droite qui rencontre à-la-fois deux circonférences concentriques, des portions égales de cette droite seront interceptées entre les deux circonférences. *ibid.*
La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde menée dans un cercle, passe par le centre du cercle et réciproquement. 35
Deux sécantes menées d'un même point hors d'un cercle, sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures. *ibid.*
Deux cordes d'un même cercle se coupent en raison réciproque. *ibid.*
Si d'un même point pris hors d'un cercle, on mène une tangente et une sécante, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure. *ibid.*
Dans tout quadrilatère inscrit à diagonales orthogonales, la somme des carrés des quatre segmens des diagonales est égale au carré du diamètre. 36
Dans tout quadrilatère inscrit à diagonales orthogonales la somme des carrés de deux quelconques des côtés opposés, est égale au carré du diamètre. 37
Si d'un point quelconque pris sur la surface d'un cercle, on mène deux cordes quelconques orthogonales, la somme des carrés de ces deux cordes sera toujours égale au double carré du diamètre, moins quatre fois le carré de la distance du point d'intersection des deux cordes au centre du cercle. 38
Equation de la tangente à un cercle par un point pris sur la circonférence; elle est celle de la perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point du contact. 40
Equation de la tangente à un cercle par un point pris au-dehors; construction qu'elle fournit pour la solution graphique de ce problème. 41
Par un point pris hors d'un cercle, mener une droite, telle que sa partie interceptée dans le cercle soit d'une grandeur donnée. 42
Mener une tangente commune à deux cercles. 43
Examen et construction des deux solutions auxquelles conduit ce problème. 45

Deux cercles étant donnés de grandeur et de position, les couper par une droite, de manière que les parties interceptées soient égales entr'elles et à une ligne donnée. 46

Trois cercles quelconques étant donnés, si, en les considérant deux à deux, on leur mène des tangentes extérieures jusqu'à ce qu'elles se coupent, les trois points d'intersection que l'on obtiendra de cette manière seront en ligne droite. *ibid.*

Lorsque deux cercles se coupent, ils ont deux points communs ; la droite qui joint ces deux points est perpendiculaire sur celle qui joint les centres, et elle est divisée par elle en deux parties égales. 48

Deux cercles ne peuvent se couper qu'autant que la somme de leurs rayons est plus grande que la distance des centres, et qu'en même temps le plus grand rayon est moindre que la somme du plus petit et de la distance des centres. 49

Lorsque deux cercles se touchent, le point de contact est sur la droite qui joint leurs centres, le contact est extérieur ou intérieur, suivant que la distance des centres est égale à la somme ou à la différence des rayons. *ibid.*

Si trois circonférences tracées dans un même plan se coupent deux à deux, les trois droites qui joindront deux à deux les points d'intersection se couperont en un même point. 50

Deux cercles se coupant, mener une droite par un des points d'intersection, de manière que des parties égales de cette droite soient interceptées dans chaque circonférence. 51

Résolution graphique des équations du second degré. 53

Par un des angles d'un carré mener une droite telle que sa partie comprise entre les deux côtés qui comprennent l'angle opposé soit égale à une ligne donnée. 55

CHAPITRE III.

De la transformation des coordonnées et formules qui servent à l'opérer dans les cas les plus ordinaires. Ces formules sont :

$$x = u \cos q + t \cos p + a$$
$$y = u \sin q + t \sin p + b$$

pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires x et y à un système de coordonnées obliques u et t ;

$$t = \frac{(y+b)\cos q - (x+a)\sin q}{\sin(p-q)}$$
$$u = \frac{(x+a)\sin p - (y+b)\cos p}{\sin(p-q)}$$

pour résoudre le problème inverse; et

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$

pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires x et y à un système de coordonnées polaires r et φ. 58 *et suiv.*
Application de ces formules à l'équation générale du second degré à deux indéterminées. 61
Il est toujours possible de faire disparaître le rectangle des coordonnées dans l'équation des courbes du second degré. 62
Parmi les différens systèmes d'axes qui satisfont à cette condition, il n'en est qu'un où les coordonnées soient rectangulaires. 63
Le centre d'une courbe du second degré est un point tel que toutes les cordes qui y passent s'y trouvent divisées en deux parties égales. 64
Les courbes du second degré ne peuvent avoir plus d'un centre. 65
L'équation générale des courbes du second degré peut toujours se ramener à deux autres de cette forme

$$Mx^2 + ny^2 + p = 0 \text{ pour les courbes qui ont un centre,}$$
$$Ny^2 + Px = 0 \text{ pour celles qui n'en ont pas,}$$

l'angle des coordonnées étant d'ailleurs quelconque. 66
Des courbes du second degré qui ont un centre. 67
Le premier genre des courbes du second degré ne renferme que trois variétés. *ibid.*
La première variété est l'ellipse, sa forme, ses équations les plus simples. 68
Recherche des foyers de l'ellipse et moyens de les construire. 71
La somme des rayons vecteurs menés à un même point de l'ellipse est une quantité constante. 72
Cette propriété fournit le moyen de décrire l'ellipse par points ou par un mouvement continu. 73
Nouveau moyen de décrire l'ellipse par points. *ibid.*
On nomme paramètre la double ordonnée qui passe par le foyer; c'est une troisième proportionnelle aux deux axes. 74
Equation au paramètre. *ibid.*
Equation polaire de l'ellipse. 76
Equation de l'ellipse par rapport à deux diamètres conjugués quelconques. 77
Quel que soit l'angle des coordonnées, les carrés des ordonnées sont proportionnels aux rectangles des abscisses correspondantes. *ibid.*
Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques équivaut

équivaut au rectangle des axes, et par conséquent, l'aire d'un parallélogramme quelconque circonscrit à l'ellipse est une quantité constante. 78
La somme des carrés des deux diamètres conjugués quelconques, est égale à la somme des carrés des axes, et par conséquent, la somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est une quantité constante. 79
Etant donnés deux diamètres conjugués et l'angle qu'ils comprennent, déterminer les axes. *ibid.*
Etant donné un diamètre, trouver son conjugué. 80
Recherche et construction des diamètres égaux à l'ellipse. *ibid.*
Equation de la courbe par rapport à ces diamètres. 81
La seconde variété des courbes du premier genre est l'hyperbole, sa forme, son équation. *ibid.*
De l'hyperbole équilatère. 83
Dans l'hyperbole équilatère, comme dans le cercle, deux angles sont égaux lorsqu'ayant leur sommet aux extrémités de l'axe, ils sont appuyés sur le même axe de la courbe. 84
Dans l'hyperbole équilatère, aussi bien que dans le cercle, les deux droites menées d'un point quelconque de la courbe aux extrémités de l'axe, font avec ce même axe deux angles qui sont complémens l'un de l'autre. 85
Dans l'hyperbole équilatère tout point du second axe est également éloigné du sommet de la courbe et du point de cette courbe qui lui répond perpendiculairement. *ibid.*
Moyen que fournit cette propriété pour construire l'hyperbole équilatère, et pour représenter en lignes les racines de l'équation du second degré lorsque ses racines sont de signe contraire. *ibid.*
L'hyperbole a deux foyers situés sur celui des deux axes qu'elle rencontre. 86
La différence des rayons vecteurs à un même point de l'hyperbole est une quantité constante. 87
Construction de l'hyperbole par points. *ibid.*
Le paramètre de l'hyperbole est comme pour l'ellipse une troisième proportionnelle aux deux axes. *ibid.*
Equation polaire de l'hyperbole. 88
Equation de l'hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués quelconques. *ibid.*
L'hyperbole n'est jamais rencontrée que par l'un des diamètres conjugués. 89
Quel que soit l'angle des coordonnées, les carrés des ordonnées à l'hyperbole sont proportionnels aux rectangles des abscisses correspondantes. 90

Le parallélogramme de deux diamètres conjugués quelconques est équivalant au rectangle des axes, et par conséquent l'aire d'un parallélogramme quelconque inscrit entre les deux branches de l'hyperbole, est une quantité constante. 91

La différence des carrés de deux diamètres conjugués d'une hyperbole équivaut à la différence des carrés des axes, et par conséquent la différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est une quantité constante. *ibid.*

L'hyperbole équilatère a seule des diamètres conjugués égaux, et tous les siens le sont deux à deux. *ibid.*

Deux diamètres quelconques d'une hyperbole sont égaux lorsque l'angle qu'ils comprennent est divisé par l'axe en deux parties égales, et que la tangente de sa moitié ne surpasse pas le rapport du second axe au premier. 92

Les lignes qui, menées par le centre de l'hyperbole, font avec l'axe des x des angles égaux et ayant pour tangente le rapport du second axe au premier, s'approchent continuellement de la courbe, sans pouvoir la rencontrer qu'a l'infini; on les nomme *asymptotes*; manière de les construire. 93

Si une ellipse et une hyperbole sont construites sur les mêmes axes, les diamètres égaux de l'ellipse prolongés sont les asymptotes de l'hyperbole. 94

Moyen de construire les asymptotes. *ibid*

Les asymptotes de l'hyperbole équilatère font à angle droit. *ibid.*

Pour l'hyperbole dont les asymptotes font entr'elles un angle égal au tiers de quatre angles droits, la distance de chaque point au foyer est double de sa distance à la directrice. 95

Equation de l'hyperbole entre ses asymptotes. *ibid.*

Si une hyperbole est coupée par une droite quelconque, les parties de cette droite interceptées entre chaque branche de la courbe et son asymptote sont égales entr'elles. 97

Moyen que fournit cette propriété pour construire l'hyperbole. *ibid.*

Pour tant de lignes que l'on voudra menées parallèlement entr'elles et de manière à couper les deux asymptotes, le rectangle formé par les parties comprises entre l'un des points où l'hyperbole est rencontrée, et chacune de ces droites est une quantité constante. 98

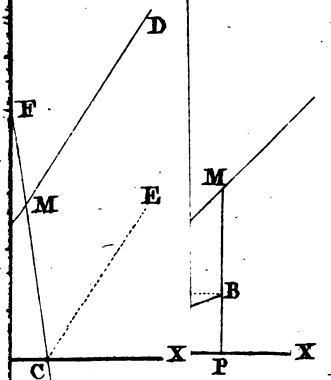
Cette quantité constante est égale au carré construit sur le demi-second axe de l'hyperbole, lorsque toutes ces droites sont perpendiculaires aux abscisses. *ibid.*

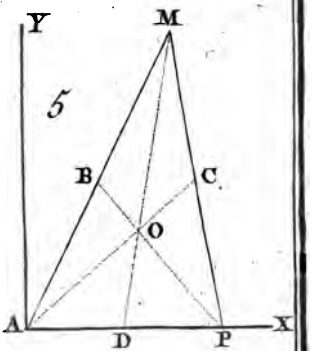
La troisième variété des courbes du premier genre est encore une hyperbole qui jouit, par rapport à l'axe des y des mêmes propriétés que la première par rapport à l'axe des x. *ibid.*

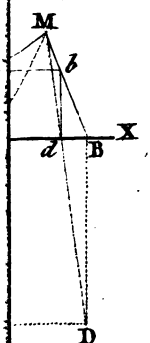
Des courbes du second degré qui sont dépourvues du centre, il n'y en a qu'une qu'on nomme *parabole*; sa forme; son équation. 99
Du foyer de la parabole; il est sur son axe principal et son abscisse est égale au quart du paramètre. 100
La parabole a la propriété d'avoir chacun de ses points autant éloigné d'une droite donnée de position que d'un point fixe également donné de position. 101
Equation polaire de la parabole. 102
Equation de la parabole par rapport à l'un quelconque des diamètres pour lesquels les coordonnées sont obliques. 104
Quel que soit l'angle des coordonnées, les carrés des ordonnées à la parabole sont proportionnels aux abscisses correspondantes. *ibid.*
Le paramètre d'un diamètre quelconque n'est autre chose que le quadruple de la distance de son sommet au foyer. *ibid.*
Des tangentes aux courbes du second degré. 105
Equation qui détermine la tangente de l'angle que doit faire avec l'axe des x une droite menée par un point donné, pour toucher une courbe du second degré. 106
Si ayant mené à une courbe du second degré deux tangentes perpendiculaires entr'elles, on les fait mouvoir avec la condition d'être toujours perpendiculaires et toujours tangentes à la courbe, la suite de toutes les positions du sommet de l'angle droit mobile sera une circonférence de cercle. 107
Examen de différentes propriétés des courbes du second degré auxquelles conduisent différentes hypothèses introduites dans l'équation citée plus haut. 109
Pour toutes les courbes du second degré, la tangente d'un point quelconque coupe sur les perpendiculaires élevées aux sommets de l'axe principal des parties dont le produit est constamment le même. 112
Equation de la courbe sur laquelle sont placés les deux points de contact et qui les détermine par ses intersections avec la courbe du second degré; moyen qu'elle fournit pour mener une tangente à une courbe du second degré par un point qui lui est extérieur. 113
Equation de la corde qui joint les deux points de contact et solution graphique plus simple qu'elle fournit du problème précédent. 115
Si après avoir mené par un point quelconque d'une droite donnée deux tangentes à une courbe du second degré et la droite qui joint les deux points de contact, on conçoit que le point quelconque se meuve le long de la droite et entraîne avec lui les deux tangentes, les deux points de contact et la droite qui les joint changeront de position; mais cette droite passera toujours par un certain même point. 117
Tout étant comme précédemment, ce dernier point sera de plus sur la perpendiculaire abaissée du centre de la courbe du second degré sur la droite, si cette courbe est une circonférence de cercle. 118
Equation de la droite menée tangentiellement à une courbe du second degré et par un point pris sur cette courbe. *ibid.*
Expressions générales de la sous-tangente, de la sous-normale, de la tangente et de la normale. 119
Valeurs particulières que forment ces quantités pour chaque courbe du second degré. 120
Les mêmes valeurs, les coordonnées étant prises du centre. 122
Pour l'ellipse et pour l'hyperbole, l'angle des rayons vecteurs menés à un même point est divisé par la tangente en ce point en deux parties égales. 124

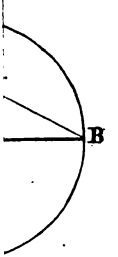
Pour la parabole, la tangente, en un point quelconque, divise en deux parties égales l'angle formé par le rayon vecteur à ce point et par la perpendiculaire abaissée du même point sur la directrice. 125
Moyen que fournissent ces propriétés pour mener une tangente en un point donné d'une courbe du second degré. *ibid.*
Démonstration synthétique de ces moyens. *ibid.*
Réflexions sur les équations du second degré à deux indéterminées. 126
Une équation du second degré entre deux indéterminées appartient à une ellipse ou à une hyperbole, suivant que le quadruple produit des coefficiens des carrés de ces deux indéterminées est plus grand ou plus petit que le carré du coefficient de leur rectangle; et elle appartient à une parabole lorsqu'il y a égalité entre ces deux quantités. 129
Application des réflexions précédentes à différentes équations. 131 et suiv.
Des courbes du second degré considérées dans le cône. 132
Si l'on coupe par un plan un cône à base circulaire, mais d'ailleurs quelconque, la section sera une ellipse lorsque le plan ne rencontrera que la nappe inférieure, une parabole lorsque, dans le même cas, il sera parallèle à une position de la génératrice, et une hyperbole lorsqu'il rencontrera en même temps les deux nappes du cône. 134
De la recherche des courbes du second degré par la connaissance de quelques propriétés. 135
Trouver la courbe telle que les droites menées de chacun de ses points à deux points fixes feront, avec la droite qui joint ces deux derniers, deux angles, dont la somme ou la différence sera constamment égale à un droit. 144
Trouver la courbe telle que la somme ou la différence des rayons vecteurs menés de chacun de ces points à deux points fixes, sera une quantité constamment la même. 155
Trouver la courbe telle que chacun de ses points est autant éloigné d'une droite donnée de position que d'un point fixe également donné de position. 155
Trouver la courbe telle que les rayons vecteurs menés de chacun de ses points à deux points fixes, font des angles égaux avec la tangente en ce point. 155

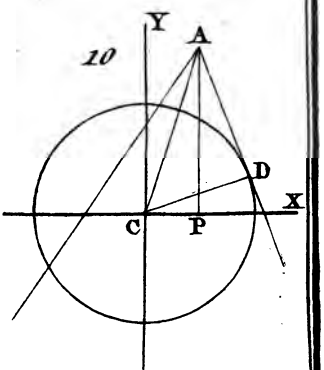
FIN DE LA TABLE.

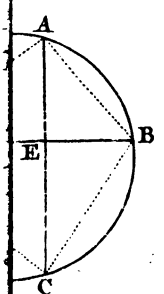

D
F
M
E
C
X
M
B
P
X

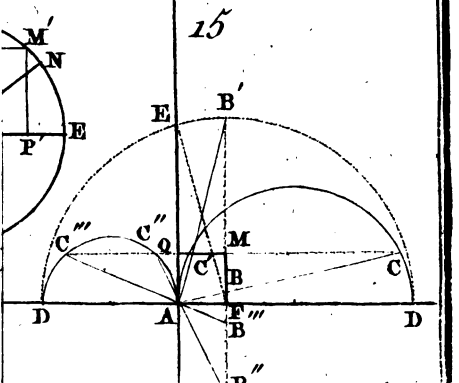

5
Y
M
B
C
O
A
D
P
X


M
b
d
B
X
D


B

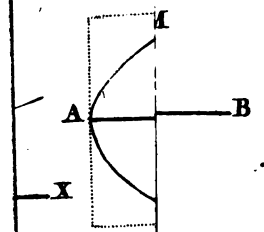

10
Y
A
D
C
P
X

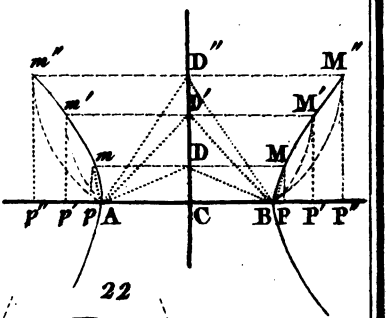

A
B
E
C


15
M′
N
P′
E
E
B′
C‴
C″
Q
M
C′
B
C
D
A
E‴
B‴
D
B″

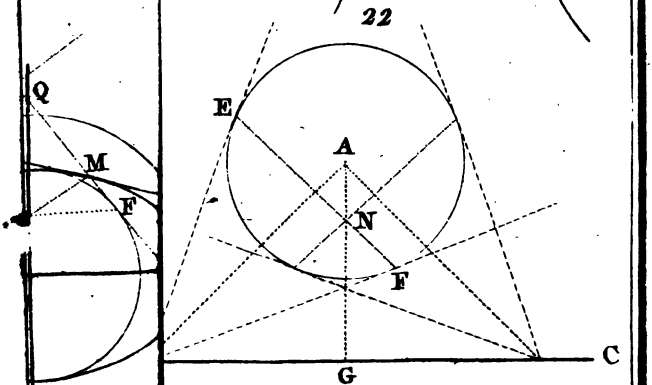
OF MICH

19

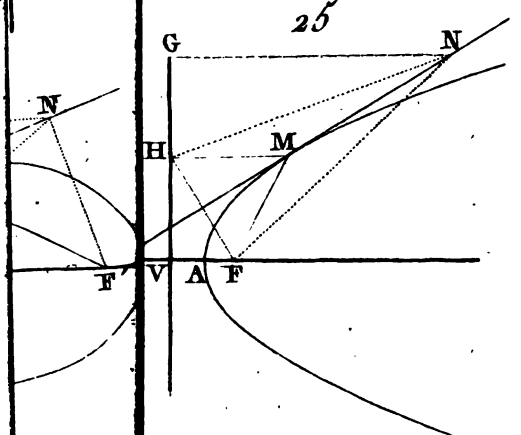


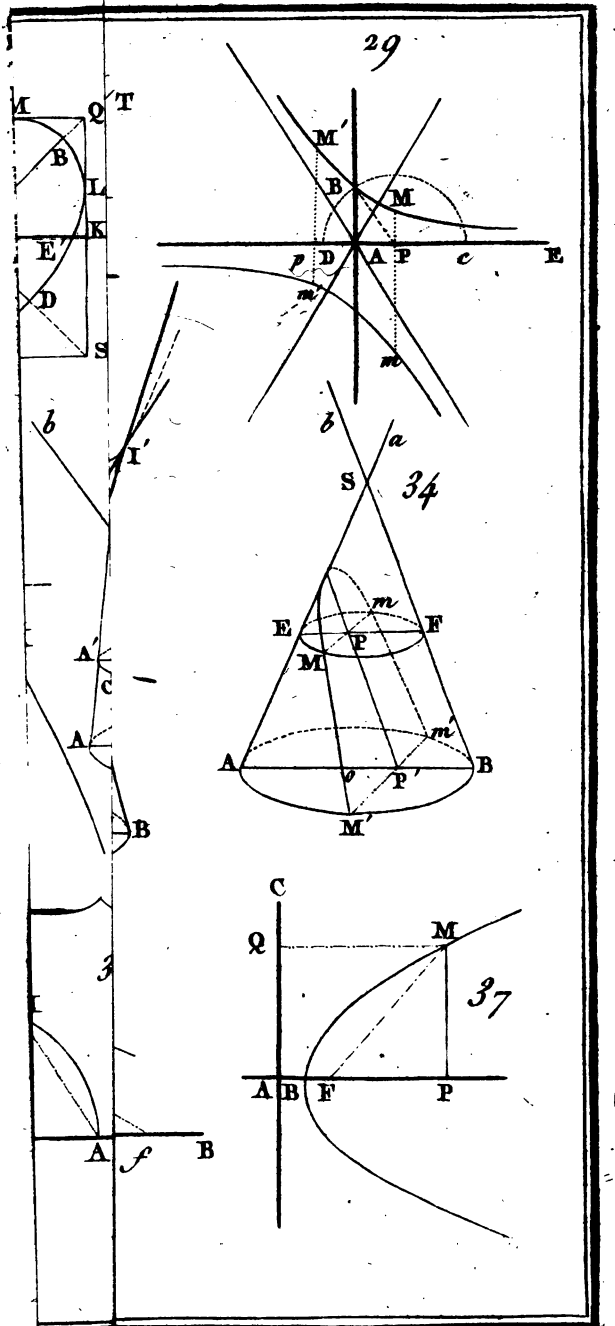


22



25




29
M
Q
T
B
L
K
E
D
S
M′
B
M
p
D
A
P
c
E
m
m
b
I′
A′
c
A
B
b
a
S
34
E
m
F
P
M
A
m′
B
P′
M′
3
I
A
f
B
C
Q
M
37
A
B
F
P

U. OF MICH.